الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربويّة

الرّياضيّات

الجزء الأول

الصّف الثّاني الثّانوي العلمي

العام الدّراسيّ 2021-2022 م

1442-1443 هـ

حقوقُ التّأليفِ والنَّشرِ محفوظةٌ

لوزارةِ التَّربيةِ في الجُمهوريَّةِ العربيَّةِ السّوريَّة

حقوقُ الطّبعِ والتّوزيعِ محفوظةٌ

للمؤسّسةِ العامّةِ للطّباعةِ

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ ٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

تأليف

فئة من المختصّين

خطّة توزيع منهاج الرّياضيّات

يخصّص ثلاث حصص أسبوعيّاً لكتاب الرياضيات الجزء الأول إضافةً إلى وحدة الإحصاء من كتاب الرّياضيّات الجزء الثاني

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			① اطّراد تابع ② توابع المرجعيّة	③ عمليّات على التوابع ④ جهة اطّراد تابع
تشرين أول	⑤ دراسة جهة اطّراد تابع ⑥ كثيرات الحدود	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام	① العدد المشتق ② تطبيقات الاشتقاق
تشرين ثاني	③ مشتقّات التوابع المألوفة ④ العمليّات على التوابع الاشتقاقيّة	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام	① المشتق والاطّراد والقيم الحديّة محلياً
كانون أول	① المشتق والاطّراد والقيم الحديّة محلياً	② حلّ المعادلة $f(x)=0$	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام
كانون ثاني	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			① نهاية تابع في $+\infty$ ② نهاية تابع في $-\infty$
شباط	③ نهاية تابع عند نقطة ④ مبرهنات النهايات	⑤ دراسة التوابع كثيرات الحدود وبعض التوابع الكسريّة	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام
آذار	① تعريف متتالية ② المتتاليات المتزايدة، والمتتاليات المتناقصة	③ المتتاليات الحسابيّة	④ المتتاليات الهندسيّة	⑤ مجموع حدود متوالية لمتتالية ⑥ تقارب المتتاليات
نيسان	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام	① المتوسّط الحسابي والانحراف المعياري	② معامل الارتباط ومستقيم الارتجاع
أيار	مسائل: لنتعلّم البحث	مسائل: قدماً إلى لأمام		

مُقدّمة

يأتي منهاجُ الرّياضيّاتِ في الصّف الثّاني الثّانوي العلمي مُتمّماً لمنهاجِ الرياضياتِ في الصّف الأوّل الثّانوي الذي جرى إعدادُه في المركز الوطنيّ لتطويرِ المناهجِ التربويّة وفق المعايير الوطنيّة، مُعتمداً في بنائِه على التّراكم الحلزونيّ للمفاهيم والمهارات وتكامُلِها، إذْ تتطور المفاهيم والمهارات في بناءٍ مترابطٍ، فتُقرَن المعارفُ بالحياة العمليَّة وتُقدَّمُ المادَّةُ العلميّةُ بطرائق سهلة ومتنوعة ومدعّمة بمواقفَ حياتيّة وتتكاملُ مع الموادِّ الدّراسيّة الأخرى.

يشتملُ الكتاب على خمس وحداتٍ يضم كلُّ منها عدداً من الدّروس. ونجدُ في كلِّ وحدةٍ عدداً من الفقراتِ المميَّزةِ التي نُجْمِلُها فيما يأتي:

- المقدمة: وهي مقدِّمة تحفيزيّة تهدف إلى تنمية اتجّاهاتٍ إيجابيّةٍ نحو الرياضيات واحترام ما قدمّه العلماء من إسهامات في ميادين العلوم المختلفة.
- انطلاقةٌ نشطةٌ: تهدفُ إلى تعزيزِ المهارات الأساسيّة التي يحتاجها المتعلّم في هذه الوحدة والإضاءة على مفاهيمها.
- أمثلةٌ: وهي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكوّن نماذجَ يجبُ اتبّاعها عند حلِّ الأنشطة والتدريبات والمسائل.
- أفكار يجب تمثلها: وهي فقرةٌ يجري فيها التنويهُ إلى قضايا ومفاهيمَ أساسيّة في الوحدة حيث تُعادُ صياغتُها بأسلوبٍ مختصرٍ ومبسَّطٍ.
- منعكساتٌ يجبُ امتلاكَها: وهي فقرةٌ تتضمن إرشاداتٍ على كيفيّة استعمال القضايا والمفاهيمَ الأساسيّة في أمثلة توضيحيّة.

- أخطاءٌ يجبُ تجنُّبها: حيث جرت الإشارة إلى الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطلاب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطلّاب في غير مكانها، أو بأسلوب منقوص.
- لنتعلّمِ البحثَ: وهي فقرة تُدَرِّب المتعلّمَ على طرائق حلِّ المشكلات وتشجّعُ التعلُّم الذاتيَّ عن طريق تزويد الطالب بمنهجيّة التفكير الاستقصائيّ وجَعْلِه يطرح على نفسه الأسئلة الصّحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثُمّ صياغة هذه الحلول بلغة سليمة.
- قُدُماً إلى الأمامِ: وهي تمارين ومسائل متنوّعة ومتدرّجة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتيّة تُتيحُ للمُتَعلِّم فُرَص تعلّم كثيرة وتعزز مهارات حلّ المسائل والتفكير الناقد لديه.

وهكذا كانت الوحدة الأولى المتعلّقة بالعموميّات على التوابع متمّمة لوحدة التوابع في كتاب الصفّ الأوّل الثّانوي.

وجرى تقديم بحث الاشتقاق إلى الوحدة الثانية نظراً إلى أهميّة هذا البحثِ في فهم العديد من موضوعات الفيزياء والكيمياء، وليكون تمهيداً لبحث النهايات الذي يجد الطلاب بوجه عام صعوبة في استيعابه عند عرضه للمرّة الأولى.

ثُمّ تأتي الوحدة الثالثة لتضمّ عدداً من تطبيقات الاشتقاق في دراسة اطّراد التوابع البسيطة وفي تعيين القيم الحديّة محلياً والتمهيد لدراسة التوابع.

وندرس في الوحدة الرابعة مفهوم نهاية التابع ويستفيد الطالب من الخبرات السّابقة لتطبيق ما تعلّمه في دراسة التوابع البسيطة.

وأخيراً نصل الى الوحدةِ الخامسةِ لندرسَ فيها مفهوماً فائق الأهميّة هو مفهوم المتتالية، وندرس اطرادها ونهايتها، وندرس بوجه خاصّ الأنواع الشهيرة من المتتاليات مثل المتتاليات الحسابيّة والهندسيّة.

زُوِّدَ الكتابُ أيضاً بمجموعةٍ من نماذجَ اختبارات تشمل جميعَ مفاهيم الكتاب. وجرى فيها تنويعُ طرائقَ عرضِ الأسئلةِ، وتضمينُ تمارينَ متدرّجةً في المستوى لتمكّنَ المتعلّمين من حلِّها تِبعاً لمستوياتِ تحصيلهم. نرجو أن تكون هذه النماذج عوناً للمدرّس في بناء نماذج مشابهة، تساعده في قياس مدى تحقيقه للأهداف التعليميّة المطلوبة.

وهنا نريد التأكيد على أنّ تحقيق الأهداف المرجّوة من الكتاب في تنمية مهارات التفكير المختلفة وخاصّة مهارات التفكير الناقد والتفكير الإبداعيّ، يتطلّب من المدرّس أن يؤدّي دور المُيسّر والموجّه للعملية التعلُّمية، فيطرح التساؤلات المُناسبة، ويختار المناسب من الأمثلة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقيّاً، ويوجه ممهداً الطريق لحلّ المسائل، ويصوغ الحلول صياغة لغوية سليمة على السبّورة.

وفي النهاية، نريد أن نتوجّه بالشكر إلى عدد من الزملاء الذين قدّموا إلينا أشكالاً مختلفة من المساعدة، فمنهم من أبدى ملاحظاته على المسودّات الأولى من الوحدات، ومنهم من حلّ المسائل أو تحقّق من صحتها، ومنهم من ساهم في إعادة صياغة بعض الفقرات.

وأخيراً نأمل من زملائنا الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويدنا بمقترحاتهم البنّاءة المتعلّقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسيّ باستمرار.

المُعدّون

المحتوى

① عموميّات التوابع 13

1. تذكرة بالتوابع 14
1.1 مجموعة التعريف 14
2.1 الخطّ البياني الممثّل لتابع 14
3.1 جهة الاطّراد 15
2. توابع مرجعيّة 17
3. عمليّات على التوابع 20
1.3 عمليّات جبريّة على التوابع 20
2.3 تركيب التوابع 20
4. دراسة جهة اطّراد تابع 24
1.4 جهة اطّراد مجموع توابع 24
2.4 جهة اطّراد λu 24
3.4 جهة اطّراد ناتج تركيب تابعين 25
5. كثيرات الحدود 28
1.5 كثيرات الحدود 28
2.5 جمع كثيرات الحدود وضربها 29
3.5 القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود 29
نشاط 1 تغيير المَعْلَم 34
نشاط 2 محور التناظر ومركز التناظر 35
تمرينات ومسائل 36

② الاشتقاق 43

1. العدد المشتق 46
1.1 نهاية تابع عند الصفر 46
2.1 التابع الاشتقاقي عند نقطة، العدد المشتق 47
2. بعض تطبيقات الاشتقاق عند نقطة 49
1.2 المماس لخطّ بياني 49
2.2 التقريب التآلفي المحلي 50
3. مشتقّات التوابع المألوفة 52
1.3 التابع المشتقّ 52
2.3 التوابع المشتقة لبعض التوابع المألوفة 52

4. العمليّات على التوابع الاشتقاقيّة 55
1.4 مشتق مجموع تابعين 55
2.4 مشتق جداء ضرب تابعين 55
3.4 مشتق مقلوب تابع 57
4.4 مشتق خارج قسمة تابعين 58
5.4 مشتق التابع $x \mapsto u(ax+b)$ 58
5. الخلاصة 61
نشاط 1. إنشاء مماسات هندسيّاً 64
نشاط 2. الوضع النسبي لخطّ بياني ومماساته 65
تمرينات ومسائل 66

③ تطبيقات الاشتقاق 75

1. المشتق والاطّراد والقيم الحدّية 79
1.1 اطّراد تابع 79
2.1 القيم الحدّية 79
3.1 الحد الراجح والحدّ القاصر 80
2. حلّ المعادلة $f(x)=0$ 83
1.2 توضّع الحلول وأهميّة الفرضيّات 83
نشاط 1. المساحة الأعظميّة 88
نشاط 2. الحجم الأصغريّ والحجم الأعظميّ 88
نشاط 3. أقصر سُلّم 89
نشاط 4. واجهة عتبة ضعيفة الميل 90
تمرينات ومسائل 92

④ المقاربات ودراسة التوابع 101

1. نهاية تابع عند اللّانهاية الموجبة 103
1.1 النهاية $+\infty$ عند $+\infty$، والنهاية $-\infty$ عند $+\infty$ 103
2.1 النهاية عددٌ حقيقي ℓ عند $+\infty$، المقارب الأفقي 104
2. نهاية تابع عند اللّانهاية السالبة 107
1.2 النهاية $+\infty$ عند $-\infty$، والنهاية $-\infty$ عند $-\infty$ 107
2.2 النهاية عددٌ حقيقي ℓ عند $-\infty$، المقارب الأفقي 108
3. نهاية تابع عند نقطة 110
1.3 النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند a، المقارب الشاقولي 110
2.3 النهاية عند a هي عددٌ حقيقي ℓ 111
4. مبرهنات النهايات 114
1.4 نهاية المجموع 114
2.4 نهاية الجداء 114

3.4 نهاية الكسر 114
4.4 أشكال عدم التعيين 115
.5 دراسة توابع كثيرات الحدود والتوابع الكسريّة 117
1.5 نهاية كثيرات الحدود عند $+\infty$ وعند $-\infty$ 117
2.5 نهاية تابع كسريّ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ 120
3.5 المقارب المائل 121
نشاط 1. ثلاثيّات الحدود من الدّرجة الثّانية 124
نشاط 2. التوابع الهوموغرافيّة 125
نشاط 3. دراسة تابع 126
نشاط 4. جماعة من المنحنيات 127
تمرينات ومسائل 128

⑤ المتتالية ونهايتها 137

.1 تعريف المتتالية 140
.2 المتتاليات المتزايدة والمتتاليات المتناقصة 144
.3 المتتاليات الحسابيّة 147
.4 المتتاليات الهندسيّة 151
.5 مجموع حدود متوالية لمتتالية 154
1.5 المتتاليات الحسابيّة 154
2.5 المتتاليات الهندسيّة 155
.6 تقارب المتتاليات 157
1.6 دراسة تقارب متتالية 157
2.6 نهاية متتالية معرّفة بصيغة من الشكل $u_n = f(n)$ 158
3.6 التقارب والعمليّات الجبريّة 159
4.6 نهاية متتالية هندسيّة 160
نشاط 1 المتتاليات المعرّفة بالتدريج: حالة التابع $x \mapsto x^2$ 167
نشاط 2 المتتاليات المعرّفة بالتدريج: حالة التابع التآلفي $x \mapsto ax + b$ 167
نشاط 3 المتتاليات المعرّفة بالتدريج: الحالة العامّة للتابع التآلفي 168
تمرينات ومسائل 169

أمثلة على اختبارات نموذجيّة 179

مسرد المصطلحات العلميّة 187

1

عموميّات التوابع

1. اطّراد تابع
2. توابع مرجعيّة
3. عمليّات على التوابع
4. دراسة جهة اطّراد تابع
5. كثيرات الحدود

غوتفريد فون لايبنتز

يحتلّ الرّياضيّاتي والفيلسوف الألماني غوتفريد فون لايبنتز Gotfried von Leibniz (1716-1646) موقعاً مهمّاً في تاريخ الرّياضيّات والفلسفة في آن معاً. ويعتقد العديد من الباحثين أنّه طوّر حساب التفاضل والتكامل على نحو مستقلّ عن إسحاق نيوتن، وما تزال الترميزات التي أدخلها (مثل رمز التكامل $\int$) تُستعمل في العديد من فروع الرّياضيّات. وكان لايبنتز أكثر المخترعين إنتاجاً في مجال الحاسبات الميكانيكيّة، عندما عمل على تطوير الآلات الحاسبة التي اخترعها باسكال.

ومع أنّ مفهوم التابع كان ضمنيّاً في الجداول المثلّثية واللّغاريتمية، التي كانت موجودة في عصر لايبنتز، ولكنّه كان أوّل مَن استعمل هذا المفهوم في عام 1692 للتعبير عن عدد من المفاهيم الهندسيّة المتعلّقة بالخطوط البيانيّة، مثل الفاصلة والترتيب والمماس والوتر والناظم، وفي القرن الثّامن عشر فقد التابع صلته بهذه المفاهيم الهندسيّة ليصبح مجرّداً أكثر.

ليونارد أويلر

أمّا أوّل مَنْ كتب الرمز $f(x)$ للدلالة على تابع f مطبّق على قيمة x فقد كان الرّياضيّاتي والفيزيائي السويسري ليونارد أويلر Leonhard Euler (1783-1707)، الذي كان مسؤولاً أيضاً عن إدخال الترميزات الحديثة للتوابع المثلثيّة، ولأساس اللّغاريتم الطّبيعي e.

1

عموميّات التوابع

انطلاقة نشطة

تعرّفت، في الصّف الأوّل الثّانوي، عدداً من التوابع المرجعيّة (المألوفة)، وتعرّفت صفات بعضها. نصادف، عند التطبيق، توابعَ بصيغة مجموع توابع مألوفة، أو جداء ضربها.

فالتابع $x \mapsto x^2+\sqrt{x}$ هو مجموع التابعين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$.

والتابع $x \mapsto x\sqrt{x}$ هو جداء ضرب التابعين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$.

غالباً ما يحتفظ مجموع تابعين، أو جداء ضربهما، ببعض خواصّ هذين التابعين، كما هو حال التابع $x \mapsto x^2+\sqrt{x}$، فهو متزايدٌ على المجال $I=[0,+\infty[$ لأنّه مجموع تابعين متزايدين على I.

إنّ موضوع هذه الوحدة هو تعريف العمليّات على التوابع ودراسة جهة اطّرادها في بعض الحالات.

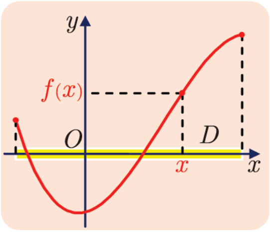
1 اطراد تابع

1.1. مجموعة تعريف التّابع

نرمز عموماً إلى مجموعة تعريف تابعٍ f بالرمز D_f، وإلى خطّه البياني بالرمز C_f. إذا كان f تابعاً وكانت D_f مجموعة تعريفه، عندئذٍ يقرن التابعُ f، بكلّ عددٍ x من D_f، عدداً حقيقياً واحداً نرمز إليه بالرمز $f(x)$. نقول إنّ $f(x)$ هي صورة x وفق f.

تعطى أحياناً صيغة التابع دون الإشارة إلى مجموعة تعريفه. في هذه الحالة، تتكوّن مجموعة تعريفه من جميع الأعداد الحقيقية x التي يمكن عندها حساب $f(x)$. فمثلاً رأينا في الصّف الأوّل الثّانوي أنّ مجموعة تعريف التابع $x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ هي $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$، وكلّ من التابعين $x \mapsto f(x)=2x+1$ و $x \mapsto g(x)=\sqrt{x^2+1}$ معرفّ على $\mathbb{R}$.

2.1. الخطّ البياني الممثّل لتابع



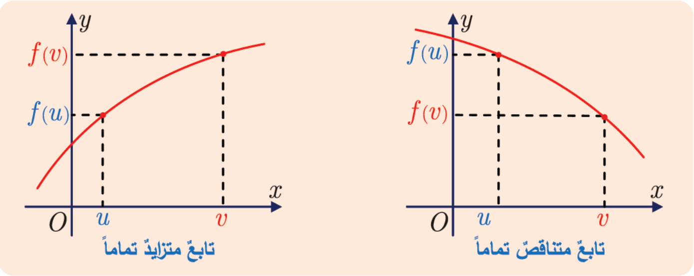
ليكن f تابعاً معرّفاً على مجموعة D.

- الخط البياني للتابع f في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَمٍ معطى، هو مجموعة النقاط $M(x,f(x))$ عندما تتحوّل x في D. فقولنا: «تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى الخطّ البياني للتابع f» يكافئ قولنا: «تنتمي x إلى D و $y=f(x)$».
- نقول إنّ $y=f(x)$ هي معادلةٌ لهذا الخط في المستوي المنسوب إلى المَعْلَم المُعطى.
- تفيد معادلة خطٍّ بيانيٍّ في معرفة إذا كانت نقطةٌ ما M تنتمي إلى هذا الخط أو لا تنتمي إليه.

3.1. جهة الاطّراد

- قولنا إنّ التابع f متزايدٌ تماماً على مجالٍ I، يعني أنّه مهما كان العددان u و v من المجال I، فإنّ الشّرط $u < v$ يقتضي $f(u) < f(v)$.
- نعرّف بأسلوب مماثل التابع المتناقص تماماً بالاقتضاء:

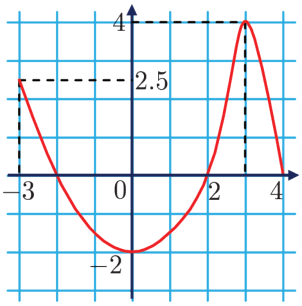
$u < v$ يقتضي $f(u) > f(v)$.



- إذا استبدلنا المتراجحة $f(u) \leq f(v)$ بالمتراجحة التامّة $f(u) < f(v)$ في تعريف التابع المتزايد تماماً حصلنا على تعريف التابع المتزايد، وكذلك إذا استبدلنا المتراجحة $f(u) \geq f(v)$ بالمتراجحة التامّة $f(u) > f(v)$ في تعريف التابع المتناقص تماماً حصلنا على تعريف التابع المتناقص.
- نقول إنّ تابعاً مطّردٌ على مجال I، إذا كان متزايداً على هذا المجال أو متناقصاً عليه.

يمكن لتابع ألاّ يكون مطّرداً على مجال.

مثال كيف نستفيد من التمثيل البياني لتابع؟



ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[-3,4]$، وليكن C_f خطّه البياني المبيَّن في الشكل المجاور.

1. استفد من الخطّ البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:
   a. نظّم جدولاً اطّراد للتابع f على المجال $[-3,4]$.
   b. ما هي حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
   c. ما هي مجموعة قيم x التي تحقّق المتراجحة $f(x) \geq 0$ ؟
2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟
3. ليكن m عدداً حقيقيّاً معطى ناقش تِبعاً لقيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.
   ادرس كلّاً من الحلات الآتية $m = -2$، $-2 < m < 0$، $0 \leq m \leq 2.5$، $2.5 < m < 4$، $m = 4$.

الحل

$a.1$. عندما يكون الخطّ البياني هابطاً على مجال (من اليسار إلى اليمين) يكون التابع متناقصاً، وعندما يكون الخطّ البياني صاعداً على مجال يكون التابع متزايداً. ومنه جدول الاطّراد الآتي

x	-3		0		3		4
$f(x)$	2.5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$b.1$. لإيجاد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ، علينا إيجاد نقاط المنحني $\mathcal{C}_f$ التي ترتيب كلٍّ منها يساوي 0. نتأمل إذن المستقيم الذي معادلته $y = 0$ ، فنرى أنّه يقطع $\mathcal{C}_f$ في ثلاث نقاط فواصلها هي الحلول التي نبحث عنها. إنّ مجموعة الحلول هي $\mathcal{S} = \{-2, 2, 4\}$.

$c.1$. لإيجاد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ ، نبحث عن نقاط $\mathcal{C}_f$ التي تراتيبها أكبر أو تساوي 0، أي تلك التي تقع على محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ أو فوقه. ومن ثَمّ فإنّ مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathcal{S} = [-3, -2] \cup [2, 4]$.

2. يؤول حلّ المعادلة $f(x) = 3$ ، إلى البحث عن نقاط الخطّ البياني التي ترتيب كل منها يساوي 3. لذلك نرسم المستقيم الذي معادلته $y = 3$ ، (فيتقاطع) مع الخطّ البياني في نقطتين إذن هناك حلاّن للمعادلة $f(x) = 3$.

3. نتبع الأسلوب نفسه، علينا البحث عن عدد النقاط المشتركة بين الخطّ البياني والمستقيم d الذي معادلته $y = m$. عندما تتحوّل m ، يبقى المستقيم d موازياً محور الفواصل.

نجعل إذن هذا المستقيم يتحوّل موازياً محور الفواصل، ونسجّل $\mathcal{S}_m$ عدد نقاط تقاطعه مع الخطّ البياني، أي عدد حلول المعادلة لنجد :

$\mathcal{S}_m$	m	$\mathcal{S}_m$	m
2	$2.5 < m < 4$	0	$m < -2$
1	$m = 4$	1	$m = -2$
0	$m > 4$	2	$-2 < m < 0$
		3	$0 \leq m \leq 2.5$

درسنا هنا مثالاً عن تابعٍ غير متزايدٍ وغير متناقصٍ على مجالٍ I . إنّ نفي « f متزايدٌ على I » إذن ليس « f متناقصٌ على I » بل « f ليس متزايداً على I ».

تَدرَّبْ

① بيِّن في الحالات الآتية ما إذا كانت النقطة المعطاة $M(x,y)$ تقع على الخطّ البياني للتابع f:

❶ $f(x)=x^2+2x-5$ ① $M(-1,-6)$ ② $M(2,3)$ ③ $M(1,0)$

❷ $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ ① $M(0,-1)$ ② $M(2,-4)$ ③ $M(1,1)$

❸ $f(x)=|2x-3|$ ① $M(-1,6)$ ② $M(3,-3)$ ③ $M(1,1)$

② عيِّن في الحالات الآتية الإحداثيّ المفقود إذا علمتَ أنّ النقطة المعطاة M تقع على الخطّ البياني للتابع f:

❶ $f(x)=x^3-4x+1$ ① $M(1,\ldots)$ ② $M(0,\ldots)$ ③ $M(-2,\ldots)$

❷ $f(x)=2x-1$ ① $M(2,\ldots)$ ② $M(\cdots,1)$ ③ $M(\ldots,-1)$

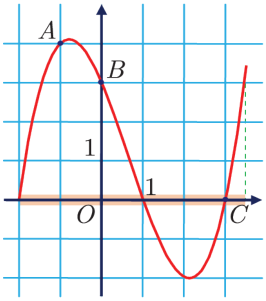
③ عيِّن مجموعة تعريف التوابع الآتية:

❶ $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$ ❷ $g(x)=\dfrac{x+1}{x(x-1)}$ ❸ $h(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

❹ $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+x}$ ❺ $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ ❻ $h(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$

❼ $f(x)=\sqrt{x+2}$ ❽ $g(x)=\sqrt{3-x}$ ❾ $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

④ في الشكل المرسوم جانباً C_f هو الخطّ البياني لتابع f على المجال $\left[-2,\frac{7}{2}\right]$.



.i استفدْ من الشكل للإجابة عن الأسئلة الآتية.

.a ما هي على التوالي صُوَرُ الأعداد -2 و -1 و 2 ؟

.b ما حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

.c ما حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ ؟

.d ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ، أعطِ قيماً تقريبيّة لهذه الحلول؟

.e أَعِد السؤال السابق في حالة $f(x)=4$.

.ii نرمز إلى نقاط C_f التي فواصلها -1 و 0 و 3 على التوالي بالرموز A و B و C .

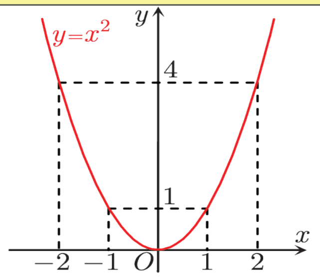
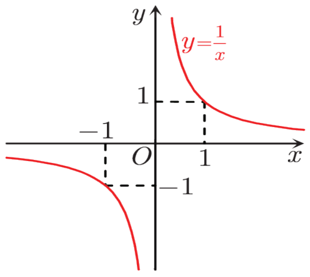
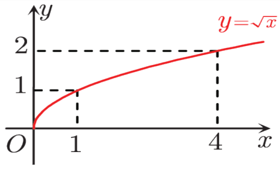
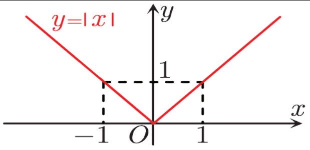
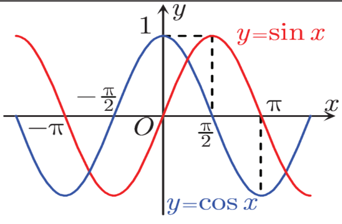
.a أثبت وقوع A و B و C على استقامة واحدة.

.b اكتب معادلة المستقيم (AC) .

.c استنتج ممّا سبق وبالاستفادة من الشكل حلّ المتراجحة $f(x)\geq 3-x$.

2 توابع مرجعيّة

فيما يأتي جدول يذكّر بالتوابع المرجعيّة (المألوفة) التي دُرِسَت في الصّف الأوّل الثّانوي.

التابع	جهة الاطّراد	الخطّ البياني
$f : x \mapsto x^2$	▪ f متناقصٌ تماماً على $]-\infty, 0]$، ومتزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$. – إذا كان $0 \leq u < v$ كان $u^2 < v^2$. – إذا كان $u < v \leq 0$ كان $u^2 > v^2$. ▪ الخطّ البياني **قطعٌ مكافئ** رأسه O.	
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	▪ f متناقصٌ تماماً على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$. – إذا كان $0 < u < v$ كان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$. – إذا كان $u < v < 0$ كان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$. ▪ الخطّ البياني **قطعٌ زائد**.	
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	▪ f متزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$. إذا كان $0 \leq u < v$ كان $\sqrt{u} < \sqrt{v}$.	
$f : x \mapsto \lvert x \rvert$	▪ f متناقصٌ تماماً على $]-\infty, 0]$، ومتزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$.	
$x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$	تابعان دوريّان دورهما 2π. وهذا يعني أنّه مهما يكن العدد الحقيقي x يكن $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$	

تكريساً للفهم

كيف نتعرّف التابع الزوجي والتابع الفردي؟

- في معلمٍ متعامد، يكون محور التراتيب محور تناظر القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y = x^2$.

واضحٌ أنّه، أيّاً كان العدد الحقيقي x، كان للنقطتين M و M' من $\mathcal{P}$، اللتين فاصلتاهما x و $-x$، الترتيب x^2 نفسه. فهما متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب. نقول إنّ التابع $f : x \mapsto x^2$، **تابعٌ زوجي**.

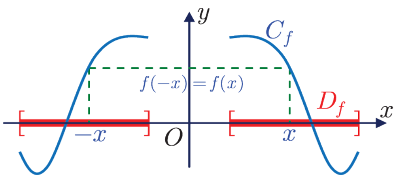
- وكذلك نرى أنّ المبدأ هو مركز تناظر القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي معادلته $y = \frac{1}{x}$.

واضحٌ أنه، أيّاً كان العدد الحقيقي غير المعدوم x، كان للنقطتين M و M' من $\mathcal{H}$، اللتين فاصلتاهما x و $-x$، ترتيبان متعاكسان. فهما متناظرتان بالنسبة إلى المبدأ. نقول إنّ التابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$، **تابعٌ فردي**.

بوجه عام

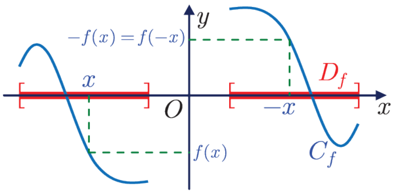
- قولنا إنّ التابع f تابعٌ زوجيٌ يعني أنّه مهما تكن x من D_f، يكن $-x$ عنصراً من D_f أيضاً، ويكن $f(-x) = f(x)$.

وعندئذٍ، في معلم متعامد، يكون الخطّ البياني للتابع f متناظراً بالنسبة إلى محور التراتيب.



- قولنا إنّ التابع f تابعٌ فرديٌ يعني أنّه مهما تكن x من D_f، يكن $-x$ عنصراً من D_f أيضاً، ويكن $f(-x) = -f(x)$.

وعندئذٍ يكون الخطّ البياني للتابع f متناظراً بالنسبة إلى المبدأ O.



إذا كانت مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}$، كان شرط تناظر المجموعة D_f أي «إذا كان x عنصراً من D_f، كان $-x$ عنصراً من D_f» محقّقاً، ولا حاجة للتوثّق من ذلك.

مثال

- التابع $x \mapsto \cos x$ تابعٌ زوجي لأنّه، أيّاً كان x، كان $\cos(-x) = \cos x$.
- التابع $x \mapsto \sin x$ تابعٌ فردي لأنّه، أيّاً كان x، كان $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- التابع $x \mapsto |x|$ تابعٌ زوجي لأنّه، أيّاً كان x، كان $|-x| = |x|$.
- التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ ليس زوجياً ولا فردياً، لأنّ مجموعة تعريفه $D = [0 + \infty[$ ليست متناظرة.

مثال كيف ندرس زوجيّة التابع؟

ادرس زوجيّة كلٍّ منَ التابعين f و g المعرّفين على $\mathbb{R}$ بالعلاقتين:

$$f(x) = x^2 + x \quad \text{و} \quad g(x) = x\sqrt{1 + x^2}$$

الحلّ

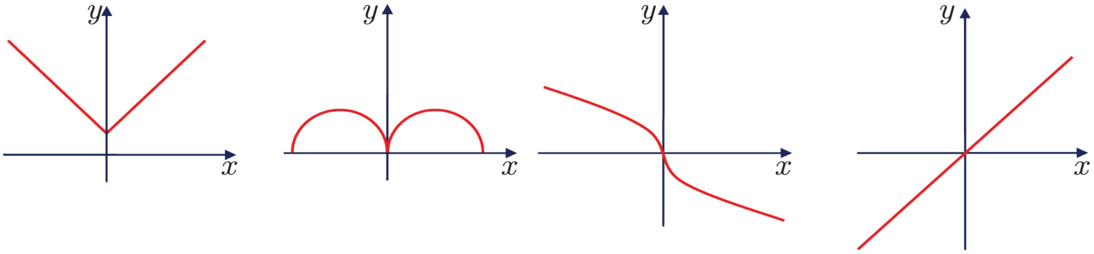
- f معرّف على $\mathbb{R}$، و $f(1) = 2 \neq f(-1) = 0$ فالتابع f ليس زوجيّاً وكذلك $f(1) \neq -f(-1)$ فالتابع ليس فردياً أيضاً.
- g معرّف على $\mathbb{R}$ وأيّاً كان x من $\mathbb{R}$ كان :

$$g(-x) = (-x)\sqrt{(-x)^2 + 1} = -x\sqrt{x^2 + 1} = -g(x)$$

فالتابع g فردي.

تَدرَّبْ

① بيِّن أيُّ المنحنيات الآتية هو خطٌّ بيانيٌّ لتابع زوجي وأي منها خطٌّ بيانيٌّ لتابع فردي:



② ادرس زوجيّة كلٍّ من التوابع المعطاة كما يأتي.

❶	① $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$	② $g(x) = \lvert 2x \rvert$	③ $h(x) = x^2 - x$
❷	① $f(x) = x \sin x$	② $g(x) = \tan x$	③ $h(x) = \cos x + \sin x$
❸	① $f(x) = \sqrt{x}$	② $g(x) = \sqrt{x^2}$	③ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

3 عمليات على التوابع

1.3. عمليّات جبريّة على التوابع

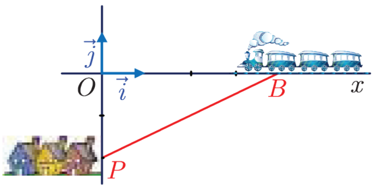
قبل تعريف العمليّات الجبريّة على التوابع، لنعرّف التساوي بين تابعين. نقول إنّ تابعين f و g متساويان تعريفاً، ونكتب $f = g$ ، إذا كان لهذين التابعين مجموعة التعريف D نفسها، وكان $f(x) = g(x)$ أيّاً كان x من D.

ليكن التابعان f و g. عندما تنتمي x إلى D_f و D_g في آنٍ معاً، يكون للعدد x صورة $f(x)$ وفق f وصورة $g(x)$ وفق g. نعرّف العمليّات الجبريّة (الجمع والضرب...) على التابعين f و g انطلاقاً من العمليّات الموافقة على الأعداد $f(x)$ و $g(x)$.

العمليّة	رمزها	تعريفها	معرّفة في حالة
الجمع	$f+g$	$x \mapsto f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
الطّرح	$f-g$	$x \mapsto f(x)-g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
الضّرب	fg	$x \mapsto f(x)g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
القسمة	$\dfrac{f}{g}$	$x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$

2.3. تركيب التوابع

مثال التعبير عن المسافة بدلالة t.



في الشكل المجاور، المَعْلَم متجانس، ووحدة قياس الطول هي الكيلومتر. تمثّل النقطة $P(0,-2)$ قريةً تقع على مسافة $2\,\text{km}$ من المحطة O. تتحرّك العربة B على «السكة» الممثّلة بمحور الفواصل.

نرمز بالرمز u إلى التابع الذي يعطي x، فاصلة B، بدلالة الزمن t مُقاساً بالساعة: $x = u(t) = 20t$ (في اللّحظة $t = 0$، كانت B في O).

1. من الواضح أنّه بالإمكان حساب y بدلالة x حيث المسافة $y = PB$. نرمز بالرمز f إلى التابع $x \mapsto y$. تيقّن أنّ $f(x) = \sqrt{4+x^2}$.

2. ولمّا كان x تابعاً للمتحوّل t، وكان y تابعاً للمتحوّل x، أمكننا تمثيل الحالة بالمخطّط المجاور.

$$t \overset{u}{\longmapsto} x \overset{f}{\longmapsto} y \quad (h : t \mapsto y)$$

3. نرى أننا ننتقل من t إلى y بواسطة تابعٍ h. ولأنّ $x = u(t)$ و $y = f(x)$ استنتجنا من ذلك أنّ $y = f(u(t))$. وعليه فالتابع h هو التابع $t \mapsto f\big(u(t)\big)$ أو $h(t) = f\big(u(t)\big)$.

4. توثّق أنّ $h(t) = \sqrt{4 + 400t^2}$.

نتيجة

نقول إنّ h هو ناتج تركيب التابعين u « ثُمّ » f. نرمز إلى هذا التابع بالرمز $f \circ u$ ونكتب $h = f \circ u$ حيث $h(t) = f(u(t))$.

تعريف

ليكن التابعان f و g. التابع $g \circ f$ (ويُقرأ « f ثُمّ g » أو « g دائرة f ») هو التابع المعرّف بالعلاقة $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

مثال ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x - 2$، وليكن g التابع المعرّف على $[0, +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = \sqrt{x}$، عندئذٍ نستبدل، في العلاقة $g(x) = \sqrt{x}$، المقدار $f(x)$ بالمتحوّل x، فنجد $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x - 2}$. إذن $g \circ f$ هو التابع $x \mapsto \sqrt{x - 2}$ المعرّف على $[2, +\infty[$.

ليس للكتابة $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ معنى إلّا إذا انتمى العددُ x إلى D_f، وكان $f(x)$ عنصراً من D_g.

إذن تتألف مجموعة تعريف $g \circ f$، من جميع الأعداد x من D_f التي تجعل $f(x)$ عنصراً من D_g.

ونرى بأسلوب مماثل، أنّ $f \circ g$ هو التابع المعرّف بالعلاقة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. عموماً $f \circ g \neq g \circ f$. فإذا كان f و g التابعين الواردين في المثال السابق، كان

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - 2$$

وهو معرّف على $[0, +\infty[$.

تكريساً للفهم

كيف نفهم معنى الرموز عند العمليّات الجبريّة؟

يدلُّ الرمز $(f + g)(x)$ على العدد $f(x) + g(x)$. ويدلُّ الرمز $(fg)(x)$ على العدد $f(x) \times g(x)$. ويدلُّ الرمز $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ على العدد $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

مثال

❶ ليكن u التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بالعلاقة $u(x)=x+\sqrt{x}$. يمكننا أن نكتبَ $u=f+g$ وقد عرّفنا $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

❷ ليكن v التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بالعلاقة $v(x)=x\sqrt{x}$. يمكننا أن نكتبَ $v=fg$ وقد عرّفنا $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

❸ ليكن f و g التابعين المعرّفين وفق $f(x)=x^2+1$ ، و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. وليكن h التابع f « ثمّ » g ، أي $g\circ f$ ، مع $h(x)=g(f(x))$ ، وكذلك k التابع g « ثمّ » f ، أي $f\circ g$ ، مع $k(x)=f(g(x))$. احسب $h(x)$ و $k(x)$. مبيّناً في كلِّ حالةٍ مجموعة قيم x التي تجعل الحساب ممكناً.

❹ f و g هما التابعان المعرّفان بالعبارتين الآتيتين:

«$f(x)$ هو الجذر التربيعي لمجموع 1 و x» و «$g(x)$ هو مجموع 1 والجذر التربيعي للعدد x».

.a اكتب باستعمال الرموز صيغة $f(x)$ و $g(x)$ ، وعيّن مجموعة تعريف كلٍ منهما.

.b اكتب كلّاً من التابعين f و g بصيغة مركّب تابعين يطلب تعيينهما.

كيف نفهم معنى الرمز $g\big(f(x)\big)$ ؟

في حالة تابع g ، يدلُّ الرمز $g(x)$ على صورة العدد x وفق g . لحساب صورة عددٍ، نستبدل في علاقة $g(x)$ ، هذا العدد بالرمز x .

فمثلاً في حالة التابع $g:x\mapsto 3x+1$ ، صورة $4u$ هي $g(4u)=3\times 4u+1=12u+1$.
وبالمثل، يدلُّ الرمز $g(f(x))$ على صورة $f(x)$ وفق g ، ونحصل عليها باستبدال $f(x)$ بالرمز x في علاقة $g(x)$ ، $g(f(x))=3\times f(x)+1$. (بالطبع يجب التوثّق من انتماء $f(x)$ إلى D_g).

مثال حساب التوابع المركّبة

ليكن f و g التابعين المعرّفين بالعلاقتين: $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

.1 احسب $(g\circ f)(x)$ وعيّن مجموعة قيم x التي يكون عندها هذا الحساب ممكناً، أي مجموعة تعريف $g\circ f$.

.2 أعد السؤال في حالة $f\circ g$.

لحساب $h(x)$ عندما $h=g\circ f$ ، نستبدل $f(x)$ بكل x في عبارة $g(x)$. بعد التوثُّق من انتماء $f(x)$ إلى D_g .

الحلّ

1. $f(x)=x^2+1$ ، يمكن حساب $f(x)$ ، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$ ، إذن $D_f=\mathbb{R}$. أمّا $g(x)=\frac{1}{x}$ فيمكن حسابه عندما $x\neq 0$ ، إذن $D_g=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$x\mapsto f(x)\mapsto g(f(x))$$

لحساب $g(f(x))$ ، يلزم ويكفي ألاّ ينعدم $f(x)$ ، ولكن أيّاً كان x من $\mathbb{R}$ ، فإنّ $f(x)$ لا ينعدم. إذن مجموعة تعريف $g\circ f$ هي $\mathbb{R}$.

لحساب $g(f(x))$ ، نستبدل $f(x)$ بالمتحوّل x في عبارة $g(x)$ ، فنجد:

$$(g\circ f)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2+1}$$

2. في حالة $f\circ g$ ، نبدأ بالتابع g ، إذن يجب البدء بأخذ x من $D_g=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. ولأنّ $D_f=\mathbb{R}$ ، يمكننا المتابعة دون شرطٍ إضافي. إذن $f\circ g$ معرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ، ولدينا

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1$$

نلاحظ أنّ $g\circ f\neq f\circ g$.

تَدرَّبْ

① التابعان f و g معرّفان وفق $f(x)=x^2+2x-3$ و $g(x)=x^2-1$. أوجد مجموعة تعريف كلٍّ من f و g و $f+g$ و fg ، ثمَّ احسب $(f+g)(x)$ و $(fg)(x)$.

② التابعان f و g معرّفان وفق $f(x)=\frac{1}{x}+x-1$ و $g(x)=2x+3-\frac{1}{x}$. ما هي مجموعة تعريف $f+g$ ؟ احسب $(f+g)(x)$.

③ احسب في الحالات التالية كلاً من $(g\circ f)(x)$ و $(f\circ g)(x)$ بعد تعيين مجموعة تعريف كلٍّ من f و g و $g\circ f$ و $f\circ g$.

1. $g(x)=3x$ ، $f(x)=2x,$
2. $g(x)=2x+1$ ، $f(x)=3x-1,$
3. $g(x)=2x-1$ ، $f(x)=x^2,$
4. $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $f(x)=2x+3,$
5. $g(x)=3x$ ، $f(x)=\frac{1}{x+1},$

4 دراسة جهة اطّراد تابع

1.4. جهة اطّراد مجموع توابع

مُبرهَنة 1

- مجموع تابعين متزايدين تماماً على مجال I هو تابعٌ متزايد تماماً على I.
- مجموع تابعين متناقصين تماماً على مجال I هو تابعٌ متناقص تماماً على I.

الإثبات

ليكن a و b عددين من I يحققان $a < b$. إذا كان f و g تابعين متزايدين على I، كان

$$f(a) < f(b) \quad \text{و} \quad g(a) < g(b)$$

بجمع المتراجحتين السابقتين طرفاً إلى طرف، نجد

$$f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$$

أي

$$(f+g)(a) < (f+g)(b)$$

وهذا إثباتُ أنّ $f+g$ متزايدٌ تماماً على I.

ونُبرهن بأسلوبٍ مماثل الحالةَ التي يكون فيها f و g متناقصين تماماً.

2.4. جهة اطّراد λu

مُبرهَنة 2

- في حالة $\lambda > 0$، يكون اطّراد التابعين u و λu متماثلتين على I.
- في حالة $\lambda < 0$، يكون اطّراد التابعين u و λu متعاكستين على I.

الإثبات

لنكتب الإثبات في حالة $\lambda < 0$، و u متزايد تماماً على I. وعلينا إثبات أنّ λu متناقص تماماً على I.

نتأمّل a و b من I يحقّقان $a < b$. ولأنّ u متزايدٌ تماماً، كان $u(a) < u(b)$، وعند ضرب طرفي هذه المتراجحة بالعدد السالب λ نجد $\lambda u(a) > \lambda u(b)$. وهذا إثباتُ ما طُلِب.

3.4. جهة اطّراد ناتج تركيب تابعين

مُبرهَنة 3

ليكن f و g تابعين مطّردين تماماً، وليكن I مجالاً محتوىً في D_f، وكذلك ليكن J مجالاً محتوىً في D_g. نفترض أنّه مهما كان x من I، كان $f(x)$ من J.

1. عندما يتّفق f و g في جهة الاطّراد، يكون $g \circ f$ متزايداً تماماً على I.
2. عندما يختلف f و g في جهة الاطّراد، يكون $g \circ f$ متناقصاً تماماً على I.

الإثبات

1. لنفترض أنّ للتابعين f و g جهة الاطّراد نفسها. ليكن a و b عددين من I يحقّقان $a < b$.

❶ f و g متزايدان تماماً (f على I و g على J)

لمّا كان f متزايداً تماماً، كان $f(a) < f(b)$. ولأنّ g متزايدٌ تماماً، استنتجنا من المتراجحة الأخيرة أنّ $g(f(a)) < g(f(b))$. أي إنّ $g \circ f$ متزايدٌ تماماً على I.

❷ f و g متناقصان تماماً (f على I و g على J)

لمّا كان f و g متناقصين تماماً، فإنّ الشرط $a < b$ يقتضي $f(a) > f(b)$. وهذا بدوره يقتضي $g(f(a)) < g(f(b))$. أي إنّ $g \circ f$ متزايدٌ تماماً على I.

2. لنفترض أنّ للتابعين f و g جهتي اطّراد متعاكستين. ليكن a و b من I يحقّقان $a < b$.

❶ التابع f متزايدٌ تماماً على I والتابع g متناقصٌ تماماً على J.

في هذه الحالة الشرط $a < b$ يقتضي المتراجحة $f(a) < f(b)$، وهذه بدورها تقتضي $g(f(a)) > g(f(b))$. فالتابع $g \circ f$ متناقصٌ تماماً على I.

❷ التابع f متناقصٌ تماماً على I والتابع g متزايدٌ تماماً على J.

في هذه الحالة الشرط $a < b$ يقتضي المتراجحة $f(a) > f(b)$، وهذه بدورها تقتضي $g(f(a)) > g(f(b))$. فالتابع $g \circ f$ متناقصٌ تماماً على I.

تكريساً للفهم

أتمكن معرفة جهة تغير $f - g$ أو fg اعتماداً على جهة تغير f و g؟

الجواب هو لا عموماً كما يوضّح ذلك المثالان الآتيان.

مثال حالة $f - g$

ليكن f و g التابعين المعرفيّن على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$. نعلم أنّ f و g متزايدان تماماً على $[0,+\infty[$. لنعرّف $u = f - g$، فيكون $u(x) = x - x^2$. لاحظ أنّ $u(0) < u\left(\frac{1}{2}\right)$ و $u\left(\frac{1}{2}\right) > u(1)$، لتتيقّن أنّ u (أي $f - g$) ليس متزايداً ولا متناقصاً على $[0,+\infty[$.

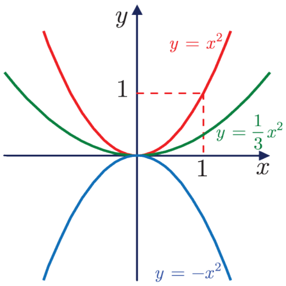
مثال حالة fg

ليكن k و ℓ التابعين المعرفيّن على $]0,+\infty[$ وفق $k(x) = x^2$ و $\ell(x) = -\dfrac{1}{x}$. نعلم أنّ k و ℓ متزايدان تماماً على $]0,+\infty[$. في حين يكون جداء ضربهما التابع $k\ell : x \mapsto -x$ وهو متناقصٌ تماماً على $]0,+\infty[$.

ولكنْ في حالة التابعين f و g في المثال السابق، يكون جداء الضرب هو التابع $x \mapsto x^3$ المتزايد تماماً على $[0,+\infty[$. في الحقيقة، إذا وضعنا فرضيّات إضافيّة على إشارة التابعين f و g أمكننا الحصول على نتائج يمكن تعميمها.

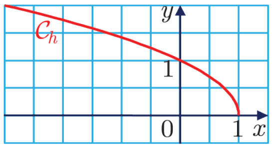
كيف نستفيد من المبرهنة 2 ؟

لنتأمل التابع $x \mapsto ax^2$، $a \neq 0$.



- في حالة $a > 0$، تُماثلُ جهةُ اطّراد $x \mapsto ax^2$ جهةَ اطّراد $x \mapsto x^2$. وعليه فالخطّ البياني للتابع $x \mapsto ax^2$ هو في هذه الحالة قطعٌ مكافئ «مفتوح من الأعلى».
- في حالة $a < 0$، تُعاكس جهةُ اطّراد $x \mapsto ax^2$ جهةَ اطّراد $x \mapsto x^2$. وعليه فالخطّ البياني للتابع $x \mapsto ax^2$ هو في هذه الحالة قطعٌ مكافئ مقلوب أو «مفتوح من الأسفل». وهذا يتفق مع دراستك السابقة.

مثال كيف نستفيد من المبرهنة 3 ؟



لنتأمّل التابع h المعرّف بالعلاقة $h(x) = \sqrt{1 - x}$. عيِّن مجموعة تعريفه D_h، وأثبت أنّه متناقصٌ تماماً عليها.

الحل

ليكن f و g التابعين المعرّفين كما يأتي $f(x) = 1 - x$ و $g(x) = \sqrt{x}$. فيكون $h = g \circ f$. التابع f معرّف على $\mathbb{R}$ ويجب أن يكون $f(x) = 1 - x$ موجباً حتّى نتمكّن من تطبيق g . إذن يجب أن يكون $1 - x \geq 0$ وعليه h معرّف على المجموعة $D_h =]-\infty, 1]$.

التابع f متناقصٌ تماماً على $]-\infty, 1]$، وينتمي عندئذ $f(x)$ إلى $[0, +\infty[$. أمّا g فهو متزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$، وعليه، استناداً إلى المبرهنة 3، يكون h متناقصاً تماماً على المجال $]-\infty, 1]$.

تَدرَّبْ

① ادرس جهة الاطّراد لكلّ من التوابع الآتية

❶ التابع $f + g$، حيث f و g التابعين المعرّفين على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق $f(x) = -x^2$ و $g(x) = -\sqrt{x}$.

❷ التابع $-3f$، حيث f التابع المعرّف على المجال $I = [-2, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

❸ التابع $f \circ g$، حيث f و g التابعين المعرّفين على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق $f(x) = -2x^2$ و $g(x) = x^2$.

❹ التابع f، حيث f التابع المعرّف على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x}$.

② لماذا يكون التابع $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]-\infty\ ,\ 0[$؟

③ بعد كتابة f بصيغة تركيب تابعين مألوفين، ادرس جهة اطّراد f على المجال المعطى I .

1. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ ، $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ ، $I =]-1, +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، $I =]-\infty, 0[$.

5 كثيرات الحدود

1.5. كثيرات الحدود

درسنا في الصّف الأوّل الثانّوي كثيرات الحدود من الدّرجة الثّانية ورأينا أنها التوابع من الصيّغة $x \mapsto ax^2 + bx + c$ إذْ a و b و c أعدادٌ حقيقيةٌ و $a \neq 0$. وأسميناها أيضاً ثلاثيّات الحدود من الدّرجة الثّانية. فمثلاً

- $3x^2 - 4x + 5$ هو ثلاثي حدود من الدرجة الثانية فيه $a = 3$ و $b = -4$ و $c = 5$.
- $-5x^2 + \frac{1}{3}$ هو ثلاثي حدود من الدرجة الثانية فيه $a = -5$ و $b = 0$ و $c = \frac{1}{3}$.
- $x^2 - x$ هو ثلاثي حدود من الدرجة الثانية فيه $a = 1$ و $b = -1$ و $c = 0$.

نريد تعميم هذا التعريف ليشمل كثيرات الحدود من أيّة درجة كانت، منطلقين مما درسناه سابقاً.

تعريف

- ليكن n عدداً طبيعياً نسمّي **كثير حدود درجته أصغر أو تساوي n** كلّ تابع P معرّف على $\mathbb{R}$ وتمكن كتابة علاقة ربطه بصيغة من النمط :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

إذْ a_n و a_{n-1} و ... و a_1 و a_0 أعدادٌ حقيقية تسمى أمثال كثير الحدود أو ثوابته أو معاملاته.

- التابع الثابت المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $x \mapsto 0$ هو تابع "كثير الحدود" خاصٌ نسميه **كثير الحدود الصفري** ونصطلح أنّ درجته تساوي $-\infty$، وعادة ما نُعبّر عنه ببساطة فنكتب 0 دلالة عليه.
- في حالة عدد حقيقي a_0 لا يساوي الصفر نعتبر التابع الثابت المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $x \mapsto a_0$ تابعاً "كثير الحدود" ونصطلح أنّ درجته تساوي 0، ونعبر عنه ببساطة فنكتب a_0 أو $a_0 x^0$ دلالة عليه.
- نقول إنّ **درجة كثير الحدود** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ **تساوي n** إذا وفقط إذا كان $a_n \neq 0$، وعندها نكتب $\deg P = n$.
- نسمّي في كثير الحدود $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كلَّ حدّ من الشكل $a_k x^k$ وحيد حدٍّ، فكل كثير حدود هو مجموع عدد منته من وحيدات الحد.
- إذا رتّبنا وحيدات الحدّ في **كثير الحدود** تبعاً لدرجاتها ترتيباً تنازليّاً أخذ كثير الحدود **الصيغة القانونية** الواردة في تعريفه: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ وقد تُرتّب الحدود في كثير الحدود تبِعاً لدرجاتها ترتيباً تصاعديّاً، وفق ما تقتضيه الحاجة.

مثال التابع $x \mapsto 7x^4 - 5x^3 + 3x - 1$، كثير حدود من الدّرجة الرّابعة مُعاملاته هي 7 و -5 و 0 و 3 و -1 (الصفر هو مُعامل الحدّ $0 \times x^2$).

يمكن أنْ يَرِدَ كثير الحدود في صيغ أخرى مُكافئة تُرَدُّ جميعاً إلى الصيغة القانونيّة بعد إجراء عمليّات جبريّة عليها وترتيب حدودها.

مثال إنّ التابع $x \mapsto \frac{5}{4}(x-2)^2 - (3x+1)(x^2+1)$ تابعٌ كثير الحدود. لأنّه يأخذ بعد نشره واختزاله الصّيغة القانونيّة الآتية $x \mapsto -3x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 8x + 4$.

مثال لنتأمّل كثير الحدود $P(x) = 2x + 2 + 3x^2 - 4x + x^3 + 7x^2 - 5$. نلاحظ أنّه ليس مكتوباً بالصيغة القانونيّة فهو يضمُّ حدَّيْنِ من الدّرجة الثّانية، وحدّين من الدّرجة الأولى وحدّين ثابتين. ولكن تتحقّق بسهولة أن $P(x) = x^3 + 10x^2 - 2x - 3$، وهي الصّيغة القانونيّة لكثير الحدود هذا.

2.5. جمع كثيرات الحدود وضربها

التوابعُ كثيراتُ الحدودِ هي توابعُ خاصّةٌ. فيعرَّف مجموع كثيري حدود وجداء ضربهما كمجموع تابعين وجداء ضربهما في الحالة العامّة.

فكّرْ

إذا كان P و Q كثيري حدود، كان $P+Q$ كثيرَ حدودٍ درجته أصغر أو تساوي أكبر درجتيهما.
جداء ضرب كثيري حدود P و Q، هو تابع كثير حدود درجته تساوي مجموع درجتي P و Q.

عند قسمة تابعين كثيرَي حدود، لا نحصل عموماً على كثير حدود بل على تابعٌ كسري.

3.5. القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود

رأيت في دراستك السابقة القسمة الإقليدية للأعداد الطبيعيّة، فإذا كان a و b عددين طبيعيين وكان $b \neq 0$ أمكننا إجراء قسمة إقليدية للعدد a على b وحساب خارج القسمة q وباقيها r. بحيث تتحقّق المساواة $a = qb + r$ ويكون r أصغر تماماً من المقسوم عليه b. مثلاً $37 = q11 + r$ حيث $(q,r) = (3,4)$. الزّوج (q,r) وحيد وخوارزميّة حسابه تسمى القسمة الإقليدية.

في الحقيقة، يمكن تعريف القسمة الإقليديّة لكثيرات الحدود، إذ لدينا المبرهنة الآتية التي نقبل صحّتها دون تقديم إثبات عليها:

مُبرهَنة 4

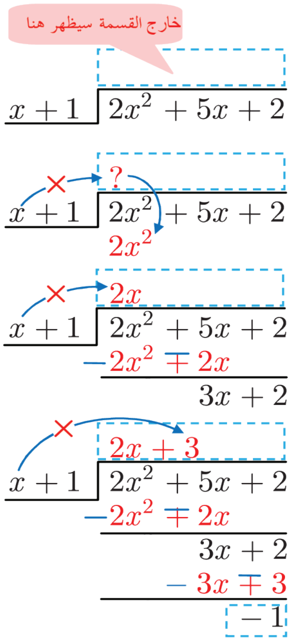
ليكن $A(x)$ و $B(x)$ كثيري حدود ولنفترض أنّ $B(x)$ ليس كثير الحدود الصّفري عندئذ يوجد زوج وحيد من كثيرات الحدود $(Q(x), R(x))$ يحقّق الشرطين الآتيين:

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \quad \text{و} \quad \deg R < \deg B$$

نسمّي $Q(x)$ **خارج القسمة الإقليدية** لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x)$، ونسمّي $R(x)$ **باقي القسمة**.

سنشرح في المثال الآتي خوارزميّة القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود.

مثال لنتأمّل كثيري الحدود $A(x) = 2x^2 + 5x + 2$ و $B(x) = x + 1$ احسب $Q(x)$ و $R(x)$ خارج وباقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x)$.



نُهيِّئ ورقة الحساب كما يلي:

1. نبدأ بكتابة المقسوم والمقسوم عليه كما في الشّكل المجاور.
2. نتساءل: بماذا نضرب x لنحصل على $2x^2$؟ من الواضح أن $2x$ تؤدّي المطلوب.
3. إذن لنضع $2x$ في حقل خارج القسمة ثُم لننجز عمليّة ضربه بالمقسوم عليه. ولنضع الناتج تحت المقسوم.
4. بطرح الناتج من المقسوم نحصل على كثير الحدود $3x + 2$.
5. هنا نكرّر ما فعلناه سابقاً وكأن المقسوم هو $3x + 2$. بماذا نضرب x لنحصل على $3x$؟ الجواب واضحٌ. لنُكمل إذن الخطوات معاً.
6. بعد إنجاز عمليّة الطرح الأخيرة نحصل على كثير الحدود -1 الذي درجته أصغر من درجة المقسوم عليه $x + 1$. ولا يعود بالإمكان متابعة خوارزميّة القسمة فيكون خارج القسمة هو $Q(x) = 2x + 3$ ويكون باقي القسمة هو $R(x) = -1$. و نتحقّق مباشرة من صحّة المساواة $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$.

نتيجة

ليكن $A(x)$ كثير حدود، وليكن a عدداً حقيقياً، عندئذ يكون باقي القسمة الإقليديّة $R(x)$ لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x) = x - a$ هو كثير الحدود الثابت $R(x) = A(a)$. وعلى الخصوص، هناك تكافؤ بين الخاصّتين الآتيتين:

1. العدد a جذرٌ للمعادلة $A(x) = 0$.
2. يوجد كثير حدود $Q(x)$ يحقّق $A(x) = (x - a)Q(x)$.

الإثبات

في الحقيقة، بإجراء قسمة إقليديّة لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x) = x - a$ نعلم أنّ

$$A(x) = (x-a)Q(x) + R(x)$$

حيث $\deg R(x) < \deg(x-a) = 1$. إذن $R(x)$ هو كثير حدود ثابت $R(x) = r \in \mathbb{R}$ ، ولتحديده يكفي أن نعرف قيمته عند إحدى قيم x . ولكننا من حيث المبدأ لا نعرف $Q(x)$ لذلك يُعدُّ اختيار القيمة $x = a$ اختياراً ذكيّاً لأن تعويض x بالقيمة a يسمح لنا بحساب الباقي دون أن نحتاج لمعرفة أي شيء عن Q كما يأتي:

$$A(a) = (a-a)Q(a) + R(a) = 0 \times Q(a) + r = r$$

أمّا تكافؤ الخاصّتين 1 و 2 فهو واضحٌ لأنّ المساواة $A(a) = 0$ تُكافئ $R(x) = r = 0$.

تَدرَّبْ

① احسب $Q(x)$ و $R(x)$ خارج وباقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x)$ في الحالات الآتية:

❶ $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ، $B(x) = x + 2,$

❷ $A(x) = x^3 + x^2 + 3$ ، $B(x) = x - 1,$

❸ $A(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8$ ، $B(x) = x + 2,$

❹ $A(x) = x^4 + 4$ ، $B(x) = x^2 - 2x + 2,$

❺ $A(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 7$ ، $B(x) = x^2 + 1,$

② احسب باقي قسمة كثير الحدود $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ على كل من $x - 2$ و $x + 1$.

③ عيّن $\lambda \in \mathbb{R}$ إذا علمتَ أنّ باقي قسمة $P(x) = x^4 + x^3 + 2\lambda$ على $x + 2$ يساوي 4 .

④ حلّ كلاً من كثيري الحدود الآتيين إلى جداء ضرب عوامل بسيطة:

❶ $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

❷ $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

⑤ حلَّ في $\mathbb{R}$ كلّاً من المعادلتين:

❶ $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

❷ $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$

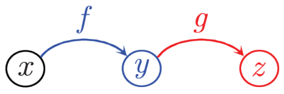
أفكار يجب تَمثُّلُها

- العمليّات على التوابع مثل الجمع $f+g$، والضرب fg، والضرب بعدد λf، والقسمة $\frac{f}{g}$، هي عمليّات معرّفة بأسلوب طبيعي جدّاً. فمثلاً $f+g$ هو التابع

$$x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{و} \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

- مجموعة تعريف $f+g$ أو fg أو $\frac{f}{g}$ ليست، عموماً، مجموعة تعريف f أو g أو ذاتها.

- يؤول تركيب تابعين إلى ما يأتي: إذا كان y تابعاً للمتحوّل x $(x \overset{f}{\mapsto} y)$ وكان z تابعاً للمتحوّل y $(y \overset{g}{\mapsto} z)$، كان z تابعاً للمتحوّل x، هذا هو التابع الذي نرمز إليه بالرمز $g \circ f$.



$$z = g \circ f\,(x) = g(f(x))$$

- لنتأمّل تابعين f و g.
  - إذا كان f و g متزايدين تماماً، كان $f+g$ متزايداً تماماً.
  - وإذا كان f و g متناقصين تماماً، كان $f+g$ متناقصاً تماماً.

- لنتأمّل تابعاً f وعدداً حقيقيّاً λ.
  - للتابعين f و λf جهة الاطراد نفسها إذا كان $\lambda > 0$.
  - وتكون جهتا اطراد f و λf متعاكستين إذا كان $\lambda < 0$.

- بكتابة تابع f بصيغة تركيب تابعين : $f = g \circ h$، تمكنُ معرفة جهة اطّراد f إذا عُلمتْ جهة اطّراد كلٍّ من g و h.

مثال

التابع $f : x \mapsto (3x+1)^3$ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. لأنّ $h : x \mapsto 3x+1$ و $g : x \mapsto x^3$ متزايدان تماماً على $\mathbb{R}$، و $f = g \circ h$.

منعكسات يجب امتلاكُها

- لحساب $h(x)$ في حالة $h = g \circ f$، استبدلْ $f(x)$ بالمتحوّل x في عبارة $g(x)$.

مثال

لنتأمّل حالة التابعين $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. لحساب $g(f(x))$، نكتب أوّلاً

$$g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 + 1}$$

ثُمّ نستبدل في هذه الصيغة $2x + 1$ بالمقدار $f(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(2x+1)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 2}$$

- لتحليل تابع f إلى ناتج تركيب تابعين (أو أكثر)، يجب الاهتمام بترتيب عمليّات حساب $f(x)$ تبعاً للأولويّات.

مثال

لنتأمّل التابع $f(x) = \cos(3x + 1)$. لحساب $f(x)$ انطلاقاً من x نحسب أولاً $3x + 1$ ثُمّ نحسب $\cos(3x + 1)$. وبهذا نكون قد كتبنا f تركيب التابعين h ثُمّ g، حيث $h(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \cos x$. يمكننا بعد ذلك التوثُّق من كون $g(h(x))$ يساوي $f(x)$.

- إذا كان ناتج جمع أمثال كثير حدود P مساوياً الصّفر فهذا يعني أنّ $P(1) = 0$، ومن ثَمّ يقبل كثير الحدود هذا العدد 1 جذراً، ويمكننا كتابة P بالصيغة $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

مثال

لنتأمّل كثير الحدود $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. نلاحظ أن مجموع أمثاله $2 - 3 + 1$ يساوي 0، إذن 1 جذرٌ لكثير الحدود P وبإجراء قسمة إقليدية على $x - 1$ نجد أنّ $P(x) = (x - 1)Q(x)$ حيث $Q(x) = 2x^2 - x - 1$، وهنا نلاحظ مجدداً أنّ مجموع أمثال Q يساوي الصفر، ومن ثَمّ $Q(x) = (x - 1)S(x)$ و $S(x) = 2x + 1$. إذن $P(x) = (x - 1)^2(2x + 1)$.

أخطاءٌ يجب تجنُّبها

- لا تكتبْ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دون التأكيد على أنّ هذا الكسر معرّف فقط عند قيم x التي تُحقّق $g(x) \neq 0$.
- عموماً التابعان $g \circ f$ و $f \circ g$ غيرَ متساويين.

مثال ليكن $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = x^2$. عندئذ $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ لأنّ

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1 \quad \text{و} \quad (f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$$

- بوجه عام **لا** يمكن استنتاج جهة اطّراد $g - f$ أو fg انطلاقاً من جهة اطّراد f و g.

أنشطة

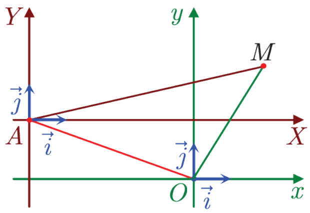
نشاط 1 تغيير المَعْلَم

الهدف من هذا النشاط هو إثبات وجود مركز أو محور تناظر لخطٍّ بياني C بالاستفادة من تغيير المعلم ومن مفهومي التوابع الزوجيّة والفرديّة.

❶ تغيير المَعْلَم

نفترض أنّ المستوي مزوّد بمعلمٍ متعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. نتأمّل الخطّ البياني C الذي معادلته $y=f(x)$ في هذا المَعْلَم.

ما معادلة الخطّ البياني C في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$؟



إحداثيتا A، في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، هما (a,b)، إذن $\overrightarrow{OA}=a\vec{i}+b\vec{j}$. إذا كانت M نقطةً في المستوي، كان لها إحداثيّات في كلا المَعْلَمين. نرمز إلى إحداثيَّتي M في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ بالرمز (x,y)، وإلى إحداثيتّيها في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ بالرمز (X,Y). شعاعيّاً هذا يعني أنّ

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AM}=X\vec{i}+Y\vec{j}$$

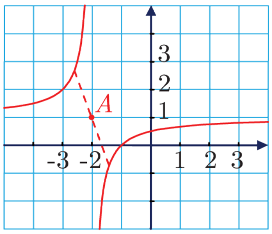
تفيد علاقة شال $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$، بالانتقال إلى الإحداثيّات، واستنتاج ما يلي :

$$x=X+a \quad \text{و} \quad y=Y+b \quad \text{(دساتير تغيير المَعْلَم)}$$

يقود هذا التغيير للمعلم إلى معادلة الخطّ البياني C في المعلم الجديد $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$. لنرمز بالرمز $Y=g(X)$ إلى هذه المعادلة.

- **إذا كان** g **زوجيّاً**، كان المحور $(A,\vec{j})$ محور تناظر للخطّ C .
- **إذا كان** g **فرديّاً**، كانت النقطة A مركز تناظر للخطّ C.

❷ مثال على الاستفادة من تغيير المَعْلَم



رسمنا، في الشكل المجاور، الخطّ البياني $\mathcal{H}$ للتابع $x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$ في معلمٍ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. يبدو كأنّ النقطة $A(-2,1)$ هي مركز تناظر للخطّ البياني $\mathcal{H}$.

1. نأخذ $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلماً جديداً. تحقّقْ أنّ دساتير تغيير المعلم هي: $x=X-2$ و $y=Y+1$.

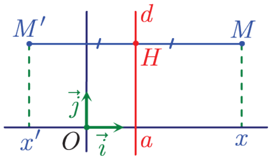
2. a. معادلة $\mathcal{H}$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي $y=\dfrac{x+1}{x+2}$. عوّض في هذه المعادلة x و y بقيمتيهما بدلالة X و Y واستنتج $Y=g(X)$ معادلة $\mathcal{H}$ في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   b. تحقّقْ من كون g تابعاً فردياً، ثُمّ عبِّر عمّا تستنتج بلغةٍ سليمة.

نشاط 2 محور التناظر ومركز التناظر

وجدنا في النشاط السابق أنّه يمكن استخدام تغيير المَعْلَم لإثبات أنّ لخطٍّ بيانيٍّ C محورَ تناظر أو مركز تناظر. في هذا النشاط، سوف ندرس طريقةً أخرى تَستخدِمُ تعريف عناصر التناظر.

❶ محور التناظر. في معْلَمٍ متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$، نرمز بالرمز C إلى الخطّ البياني الذي معادلته $y = f(x)$ ونرمز بالرمز d إلى المستقيم الذي معادلته $x = a$.



قولنا إنّ d **محور تناظر** للخطّ البياني C، يعني أنّ نظيرةَ كلّ نقطةٍ M من C، بالنسبة إلى المستقيم d، هي نقطةٌ من C أيضاً.

1. لتكن $M(x,y)$ نقطةً ما من المستوي و $M'(x',y')$ نظيرتها بالنسبة إلى المستقيم d. احسب x' و y' بدلالة x و y.

مساعدة: تمكن الاستفادة من المساواة الشعاعيّة: $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.

2. أثبت النتيجة الآتية: القول «المستقيم d الذي معادلته $x = a$ هو محور تناظر الخطّ البياني C_f» يكافئ القول: «أيّاً كان $x = a + h$ من D_f، كان $a - h$ من D_f و $f(a + h) = f(a - h)$».

بعد حساب $f(a + h)$، يحسب $f(a - h)$ بسهولة، إذ يكفي أن نستبدل المقدار $-h$ بالمقدار h في عبارة $f(a + h)$.

3. **تطبيق:** ليكن f التابع $x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$. أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$ هو محور تناظر للخطّ البياني للتابع f.

❷ مركز التناظر. في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، نرمز بالرمز C إلى الخطّ الذي معادلته $y = f(x)$، وبالرمز A إلى النقطة التي إحداثيّاتها (a,b).

نقول إنّ A **مركز تناظر** للخط البياني C، إذا وفقط إذا كانت نظيرةُ كلِّ نقطةٍ M من C، بالنسبة إلى A، نقطةً من C.

1. لتكن $M(x,y)$ نقطةً ما من المستوي و $M'(x',y')$ نظيرتَها بالنسبة إلى النقطة $A(a,b)$. أثبت أنّه إذا كان $x = a + h$، كان $x' = a - h$ و $y + y' = 2b$.

مساعدة: ارسمْ شكلاً.

2. أثبت النتيجة الآتية: القول « النقطة $A(a\,,b)$ هي مركز تناظر الخطّ البياني C_f » يكافئ القول: « أيّاً كان $x = a + h$ من D_f، كان $a - h$ من D_f و $\dfrac{f(a + h) + f(a - h)}{2} = b$ ».

3. **تطبيق:** ليكن f التابع $x \mapsto \dfrac{2x - 1}{x + 1}$. أثبت أنّ النقطة $A(-1,2)$ هي مركز تناظر للخطّ البياني للتابع f.

تمرينات ومسائل

1 التابعان f و g معرّفان وفق: $f(x)=\dfrac{3x+9}{x+1}$ و $g(x)=2+\dfrac{4}{x+1}$. عيّن مجموعة تعريف كلٍّ من f و g . وعيِّن مجموعة تعريف $2f-3g$ ، واحسب $(2f-3g)(x)$.

2 بيِّن أيُّ التوابع الآتية كثيرُ حدود.

1. $f(x)=x^2+\dfrac{x}{2}+3$
2. $g(x)=5x^2+x\sqrt{2}-1$
3. $h(x)=\dfrac{2x^2+1}{4}+\dfrac{1}{x+1}$
4. $k(x)=x^2+2\sqrt{x}$
5. $\ell(x)=(x-1)(x+3)$
6. $m(x)=x(x+3)$

3 في كلّ حالة، اكتب كثير الحدود المعطى بالصيّغة القانونيّة.

1. $A(x)=(3x+1)^2-2(3x-1)$
2. $B(x)=(x^2+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5})$
3. $C(x)=(x-3)(x^2+3x+9)$
4. $D(x)=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{12})+\sqrt{3}(x+2\sqrt{3})$
5. $E(x)=(\frac{1}{2}x^2+3x-1)(-4x^3+6x-10)$
6. $F(x)=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

4 انشر كثيري الحدود $(x-1)(x^2+x+1)$ و $(x+1)(x^2-x+1)$. ثمّ استنتج أنّ x^6-1 يساوي جداء ضرب ثلاثة كثيرات حدود من الدّرجة الثّانية.

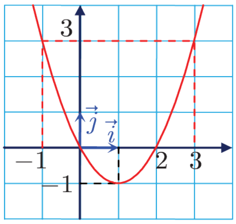
5 ليكن كثير الحدود $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ ، احسب $P(1)$ ، ثمّ استنتج حلول المعادلة $P(x)=0$ ، ثم حلّها بتحليل طرفها الأول إلى جداء عوامل بطريقة التجميع إلى فئات.

6 ليكن f و g التابعين المعرّفين على المجال $I=[0,+\infty[$ وفق $f(x)=x^2$ و $g(x)=x$. علّل لماذا يكون $f+g$ متزايداً تماماً على I .

7 لماذا يكون التابع $x\mapsto x^2+|x|$ متناقصاً على المجال $]-\infty,0]$ ؟

8 لماذا يكون التابع $x\mapsto x-\dfrac{1}{x}$ المعرّف على $I=]0+\infty[$ متزايداً على I ؟

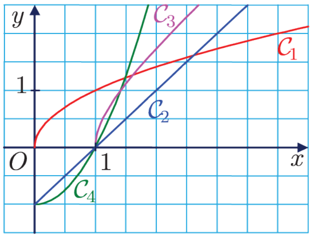
9 رسمنا في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، الخطّ البياني C_f للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^2 - 2x$.



أعِدْ رسم C_f في كرّاسك، ثمَّ استنتج رسم الخطوط البيانيّة للتوابع g و h و k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقات :

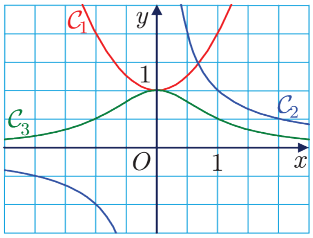
$g(x) = -f(x)$ و $h(x) = |f(x)|$ و $k(x) = f(|x|)$.

10 في الشكل المجاور، الخطوط البيانيّة للتوابع f و g المعرّفة على $[0,+\infty[$ بالعلاقتين $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$. نضع $h = g \circ f$ و $k = f \circ g$.



1. دلَّ كلاً من هذه التوابع على خطّه البياني.
2. علّل كونَ كلٍّ من التابعين h و k متزايداً على مجال تعريفه.

11 في الشكل المجاور، الخطوط البيانيّة للتوابع f و g و h المعرّفة وفق: $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}, (x \neq 0)$ و $h = g \circ f$.



1. علّل كون التابع h معرّفاً على $\mathbb{R}$.
2. خصّص لكل تابع خطّه البياني.
3. a. علّل كون h متناقصاً تماماً على $[0,+\infty[$.
   b. علّل كون h متزايداً تماماً على $]-\infty,0]$.

12 f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = 4x^3 - 3x$. أثبت أنَّ $f \circ g = g \circ f$.

13 احسب $(f \circ f)(x)$ في الحالات الآتية

① $f(x) = 2x - 3$ ② $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ③ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

14 احسب $(x^2 + px + q)^2$ ثمَّ تحقق أنَّ $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ هو مربع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

16 أثبت أنَّ $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$ هو مربع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

17 عيّن عدداً حقيقيّاً a يكون عنده كثيرُ الحدود $x^4 + 2ax^3 - 4ax + 4$ مربّعَ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

لنتعلّم البحث معاً

18 تحليل تابع

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$. اكتب f تركيبَ تابعين h ثُمّ g . ثُم أعِد السؤال في حالة $f(x)=(1+x^2)^2$.

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** نهدف إلى إيجاد تابعين g و h يُحقّقان $f(x)=g(h(x))$ أيّاً كانت قيمة x من D_f . لتحقيق ذلك، نحلّل عمليّة حساب $f(x)$ بدءاً من x . مبيّنين أولويّات الحساب، ومكتفين بمرحلتين أساسيّتين.

✌ **بحثاً عن طريق.** يجري حساب $\dfrac{1}{2x-1}$ في مرحلتين نبدأ أوّلاً بحساب $h(x)=2x-1$ ثُمّ نُتبِع ذلك بحساب $g(x)=\dfrac{1}{h(x)}$. وهنا نتذكّر أنّ التابع h هو التابع الذي نبدأ به عند حساب $f=g\circ h$.

- اكتب f بالصيغة المطلوبة، وتوثّق أنّ حساب $g(h(x))$ يعطي فعلاً $\dfrac{1}{2x-1}$.
- أعِد المناقشة السابقة في حالة $f(x)=(1+x^2)^2$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

19 صيغة أخرى لتابع كسري

ليكن f التابع الكسري المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. عيّن أعداداً حقيقيّة a و b و c تُحقّق، في حالة x من $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ ، العلاقة :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

نحو الحلّ

✌ **فهم السؤال.** نظراً إلى اختلاف الصيغة المعطاة للتابع $f(x)$ عن الصيغة المطلوبة، يمكننا أن نفكر بإجراء عمليّات جبريّة على إحدى الصيغتين بهدف الوصول إلى الأخرى. ولا ننسى أننا درسنا القسمة الإقليديّة، وهنا $f(x)$ كسرٌ مقامه $x-2$ ونجد المقام ذاته في الصيغة المطلوبة.

✌ **بحثاً عن طريق.** ما هي الصيغة التي نحصل عليها بضرب طرفي المساواة المطلوبة بالمقام $x-2$؟

- تيقّن أن المطلوب يؤول إلى إيجاد أعدادٍ حقيقيّة a و b و c تُحقّق

$$x^2-x=(x-2)(ax+b)+c$$

أيّاً كانت $x\neq 2$.

- ما الصلة التي تراها بين $ax+b$ و c من جهة وخارج وباقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود x^2-x على $x-2$.
1. أنجز القسمة الإقليدية لكثير الحدود x^2-x على $x-2$.
2. عيِّن a و b و c.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

20 تابع محدود

ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$.

① عيّن عددين حقيقيّين m و M يُحقّقان $m \leq f(x) \leq M$ وذلك أيّاً كان x من $\mathbb{R}$.

② ادرس اطّراد التابع f.

نحو الحلّ

① **فهم السؤال.** نريد أن نحصر قيم التابع f بين قيمتين m و M ونعلم أنّ $-1 \leq \sin x \leq 1$، لذلك نحاول أن ننطلق من هذه المتراجحة للوصول إلى المتراجحة المطلوبة: $m \leq f(x) \leq M$.

بحثاً عن طريق.

- بالاستفادة من المتراجحة $-1 \leq \sin x \leq 1$، أثبت أنّه أيّاً كان x، كان $1 \leq \sin x+2 \leq 3$، واستنتج أنَّ f معرّف على $\mathbb{R}$.
- أثبت أنّه يوجدُ عددان حقيقيّان m و M يُحقّقان $m \leq f(x) \leq M$ وذلك أياً كان x من $\mathbb{R}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

② **فهم السؤال.** نريد دراسة اطّراد التابع f ونحن نعرف جهة اطّراد التابع $x \mapsto \sin x$ على المجال $[0,2\pi]$ وبالاستفادة من النتائج المتعلّقة بجهة اطّراد التابع المركّب تمكن معرفة جهة اطّراد التابع f انطلاقاً من جهة اطّراد التابع $x \mapsto \sin x$ ومن كون التابع $x \mapsto \sin x$ دورياً يمكن استنتاج دراسة اطّراد التابع f على كامل $\mathbb{R}$.

بحثاً عن طريق.

- رمّز بالرمز u إلى التابع $x \mapsto \sin x$. ثم أوجد التابع g الذي يحقق $f=g\circ u$.
- تذكَّر أنّ u تابعٌ دوري ما دوره؟ استنتج أنَّ f دوري، هاتِ دوراً له.
- ذكِّر بجهة اطراد u على المجال $[0,2\pi]$. ثُمّ استنتج جهة اطّراد التابع f على المجال $[0,2\pi]$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

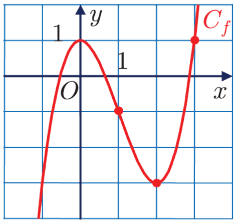
قُدُماً إلى الأمام

21 عمليّات على التوابع التآلفيّة

f و g تابعان تآلفيان معرّفان على $\mathbb{R}$: $f(x) = ax + b$ و $g(x) = cx + d$.

1. أثبت أنَّ المجموع $f + g$ تابع تآلفي.
2. أثبت أنّ التابع المركّب $f \circ g$ تابعٌ تآلفي.
3. أيكون جداء الضرب fg تابعاً تآلفيّاً؟
4. نفترض أنّ $g(x) = x$ أيّاً كانت x . أثبت أنّ الشرط $(f \circ f)(x) = x$ يُكافئ $(f = g)$ أو $(a = -1)$.

22



في الشكل المجاور، يمثّل المنحني C_f الخطّ البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

1. ارسم الشكل في كرّاسك واستنتج رسم الخطوط البيانيّة للتوابع g و h و k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقات :

$g(x) = -f(x)$ و $h(x) = |f(x)|$ و $k(x) = f(-x)$.

2. نعرّف على $\mathbb{R}$، التابع F وفق $F(x) = f(|x|)$.

   a. أثبت أنَّ F تابعٌ زوجي.

   b. استنتج من C_f الخطّ البياني للتابع F .

23

ليكن f و g التابعين المعرّفين وفق $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$ ، وليكن $h = g \circ f$.

1. عيّن مجموعة تعريف h واحسب $h(x)$.
2. ليكن k التابع المعرّف بالعلاقة $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$. أيكون التابعان h و k متساويين؟

24

f_1 و f_2 تابعانِ معرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f_1(x) = x^2 + 1$ و $f_2(x) = 2x - 1$ ، و f_3 معرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ ، و f_4 معرّف على $[0, +\infty[$ وفق $f_4(x) = \sqrt{x}$. اكتب كلاً من التوابع f و g و h و k الآتية بصيغة مركّب تابعين، مستفيداً من التوابع f_1, f_2, f_3, f_4 .

① $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ ② $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

③ $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$ ④ $k : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$

25 التوابع f و g و h معرّفة بالترتيب وفق ما يأتي:

$$h(x) = 2x - 1 \text{ و } g(x) = 1 + \frac{1}{2x} \text{ و } f(x) = 2x - \frac{1}{2x}$$

1. a. اكتب f بصيغة مجموع تابعين u و v موضّحاً ما قمت به.
b. ما جهة اطّراد التابعين u و v على كلٍّ من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$؟ استنتج من ذلك جهة اطّراد f على كلٍّ من هذين المجالين.

2. a. احسب وبسّط $\frac{f(x)}{g(x)}$.
b. هل التابعان h و $\frac{f}{g}$ متساويان؟ عيّن بالضبط الخطّ البياني للتابع $\frac{f}{g}$.

26 لنتأمل التابعين f و g المعرّفين على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \text{ و } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$$

1. اكتب g على بصيغة فرق تابعين بسيطين، بيِّن جهة اطّراد g على I.
2. نستعمل الرموز $s = f + g$ و $d = f - g$.
a. ما جهة اطّراد s وما جهة اطّراد d على I.
b. ارسم في المعلم نفسه الخطّ البياني لكل من s و d.
3. بملاحظة أنَّ $f = \frac{1}{2}(s + d)$، ارسم نقطيّاً بالدّقة الممكنة الخطّ البياني للتابع f.

27 جهة اطراد $\frac{1}{f}$.

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ويحافظاً على إشارةٍ ثابتة عليه. ($f(x) > 0$ على I أو $f(x) < 0$ على I). نفترض أنّ التابع f مطرّدٌ على I أي إنّه متزايدٌ أو متناقصٌ عليه.

1. استعرض جميع الحالات الممكنة، وعيّن في كلّ حالة جهة اطّراد $\frac{1}{f}$ على I.
2. تطبيقات: عين جهة اطّراد كلٍ من التوابع g الآتية على المجال المعطى I.

① $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad I = [0,+\infty[$

② $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad I =]0,+\infty[$

③ $g(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad I = [0,\frac{\pi}{4}]$

28 ليكن f التابع المعرّف على $I =]-1,+\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$.

1. عين ثلاثة أعداد حقيقيّة a و b و c تُحقّق أيّاً كان x من I العلاقة

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

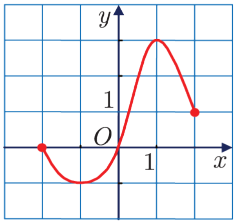
.2 استنتج أنّ f متزايدٌ تماماً على I.

.3 .a تيقّن أنّه، مهما تكن x من I يكن $x^2+3x+3=(x+1)^2+x+2$ ، واستنتج من ذلك أنّه، مهما تكن x من I يكن $\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}>1$.

اشرح كيف يمكننا أن نستنتج، أنّه في حالة $x>1$ يكن $f(x)>x-1$.

.b أثبت أنّه مهما تكن x من I يكن $f(x)<x$.

.c اشرح بيانيّاً معنى المتراجحتين السابقتين، مُظلّلاً على الرسم منطقة المستوي التي تحوي الخطّ البياني للتابع.



29 دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي:

.1 مثّلنا جانباً الخطّ البياني C_f لتابع f معرّف على $[-2,2]$.

.a للمعادلة $|f(x)|=\frac{1}{2}$ ثلاثة حلول.

.b الخطّ البياني للتابع $x\overset{g}{\mapsto}2f(x)$ يقع فوق C_f.

.c نعرّف $h(x)=f(-x)$ في حالة $x<0$ ، و $h(x)=f(x)$ في حالة $x\geq 0$. عندئذ يكون h زوجيّاً.

.d نعرّف $k(x)=-f(x)$ في حالة $x<0$ ، و $k(x)=f(-x)$ في حالة $x\geq 0$. عندئذ يكون للخطّ البياني للتابع k مركز تناظر.

.2 f تابعٌ فردي معرّف على $\mathbb{R}$.

.a $f(0)=0$.

.b $f\circ f$ تابعٌ زوجي.

.c $-f$ تابعٌ زوجي.

.d $\frac{1}{f}$ تابعٌ فردي.

.3 للخطّ البياني C_f محور تناظر هو المستقيم $x=a$ ، و f معرّف على $\mathbb{R}$.

.a f تابعٌ زوجي.

.b $f(2a-x)=f(x)$.

.c ليس للخطّ البياني C_f محور تناظر آخر.

.4 f تابعٌ معرّف على $]-1,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$.

.a مهما تكن $x>-1$ ، يكن $f(x)\geq 0$.

.b يقع الخط البياني C_f فوق القطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2$.

.c للمعادلة $f(x)=1$ حلاّن.

.d مهما تكن $x>-1$ ، يكن $f(x)-x>0$.

2

الاشتقاق

1 العدد المشتقّ

2 بعض تطبيقات الاشتقاق عند نقطة

3 مشتقّات التوابع المألوفة

4 العمليّات على التوابع الاشتقاقيّة

في يومنا هذا، نقرأ مباشرة على لوحة التحكّم سرعة السيّارة مُقاسة بالكيلومتر في الساعة km/h. ولا نستغرب أن تكون هذه السرعة متغيّرة تابعة للزمن وليست ثابتة. ونفهم أيضاً أنّ التعريف الشائع للسرعة بصفتها خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن اللّازم لقطعها لا يكفي لتعريف السرعة التي نقرؤها في لوحة التحكّم.

كيف نحصل إذن على هذه السرعة اللحظية بأسلوب رياضياتي دقيق؟

منذ بداية القرن السابع عشر، أعطت الدراسة الفيزيائيّة للسقوط الحرّ للأجسام بتأثير ثقلها التي أجراها غاليليو غاليليه (1564-1642) أوّل مثال عن سرعة متغيّرة ولكن على نحو يمكن التنبؤ بتغيّره. لقد جرت مُقاربة السرعة أولاً بصفتها تابعاً للزمن، وذلك قبل أن يجري تعريفها رياضياتياً، في نهاية القرن السابع عشر، بصفتها التابع المشتق للتابع $t \mapsto d(t)$ (الذي يمثل المسافة التي قطعها الجسم الساقط حتّى اللّحظة t).

Galileo Galilei

برهن غاليليه أنّه في حالة السقوط الحر لجسم بدون سرعة بدء يقطع الجسم حتّى اللّحظة t مسافة قدرها $d(t)=\frac{1}{2}gt^2$، وأن سرعته في تلك اللّحظة تساوي $v(t)=gt$، حيث g مقدار ثابتٌ لا يتعلّق بالجسم الساقط. وكما سنرى في هذا البحث $t \mapsto v(t)$ هو التابع المشتّق للتابع $t \mapsto d(t)$.

2

الاشتقاق

انطلاقة نشطة

نشاط 1 مفهوم السرعة اللحظيّة

نترك كرة تسقط من النقطة O الواقعة على ارتفاع 25 متراً عن سطح الأرض. تعطى المسافة التي قطعتها الكرة حتى اللّحظة t بالعلاقة $S(t) = 5t^2$ حيث يقدّر الزّمن t بالثّواني، بينما تقدّر المسافة $S(t)$ بالأمتار.

نعلم أن لهذه الكرة المتحرّكة، في اللّحظة $t = 2$، سرعة لحظيّة نرمز إليها بالرمز $v(2)$. كيف نحسب هذه السرعة؟ حدسياً، يمكننا أن نأخذ فكرة جيّدة عن قيمة السرعة $v(2)$ إذا حسبنا السرعة الوسطيّة للكرة بين اللحظتين 2 و $2 + h$ عندما يكون h قريباً جداً من الصفر.

1. تحقّق أنّ السرعة الوسطيّة للكرة بين اللحظتين 2 و $2 + h$ هي $20 + 5h$. واحسب القيم الموافقة عندما تأخذ h القيم -0.1 و -0.05 و 0.05 و 0.1 وأخيراً عندما 0.001.

مساعدة: تعطى السرعة الوسطيّة للكرة بين اللحظتين t و $t + h$ بالعلاقة $\dfrac{S(t+h) - S(t)}{h}$.

2. السرعات التي حصلنا عليها آنفاً هي قيم تقريبيّة للسّرعة $v(2)$، ولكنّ أيّاً منها لا يساوي $v(2)$. لمّا كان هذا التقريب أفضل كلما كان h أقرب إلى الصفر كانت الطريقة المثلى لتعريف $v(2)$ هي القول إنّ $v(2)$ هي نهاية المقدار $\dfrac{S(2+h) - S(2)}{h}$ عندما تسعى h إلى الصفر أي عندما يأخذ h قيماً أقرب فأقرب من الصفر.
3. وجدنا أنّ هذه النسبة تساوي $20 + 5h$. ما نهايتها عندما تسعى h إلى الصفر؟

نتيجة: لتعريف السرعة اللّحظيّة، درسنا النهاية عند الصفر لتابع من النمط:

$$h \mapsto \frac{S(a+h) - S(a)}{h}$$

1 العدد المشتقّ

1.1. نهاية تابع عند الصفر

تنويه مهم: في كلّ ما يأتي نفترض أنّ مجموعة تعريف التوابع المدروسة هي مجالٌ، غير مقتصر على نقطة واحدة، أو اجتماع عدد منته لمجالات من هذا النوع.

مثال إنّ التابع $g : x \mapsto \dfrac{2(1+x)^2 - 2}{x}$ معرّف على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. ولا يمكن تعريف $g(0)$ ولكن يمكننا حساب $g(x)$ عند جميع قيم x المجاورة للصفر.

- سنطرح إذن على أنفسنا السؤال الآتي: ماذا تصبح قيم $g(x)$ عندما تقترب قيم x أكثر فأكثر من الصفر؟ وعلى سبيل المثال لا الحصر عندما تقع x في المجال $]-0.1,0.1[$ محذوفاً منه الصفر؟
- إنّ الإجابة عن هذا السؤال تعني دراسة نهاية التابع g عند الصفر. وفي هذا المثال نلاحظ أنّه إذا كان $x \neq 0$ كان $g(x) = \dfrac{2+4x+2x^2-2}{x} = 4+2x$. إذن عندما تقترب قيم x أكثر فأكثر من الصفر، تقترب قيم $g(x)$ من 4. وبقول أدقّ : أيّاً كان العدد الموجب تماماً α، تنتمي جميع قيم التابع g إلى المجال $I =]4-\alpha, 4+\alpha[$ عندما تكون x صغيرة بما فيه الكفاية. فإذا كان $\alpha = 0.001$ مثلاً وقعت جميع القيم $4+2x$ في المجال I في حالة x من المجال $]-0.0005, 0.0005[$.
- نقول إنّ العدد 4 هو نهاية التابع g عند الصفر ونكتب $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 4$.

الحالة العامّة

- f تابع معرّف على مجموعة D تحوي الصفر أو الصفر طرف أحد مجالاتها. حدسياً القول إنّ العدد ℓ هو نهاية التابع f عند الصفر يعني أنّه كلما كانت قيم x من D قريبة من الصفر تجمّعت قيم $f(x)$ حول ℓ. وهذا يعني أنّه أياً كان العدد الموجب تماماً α، فستقع قيم $f(x)$ حتماً بين $\ell - \alpha$ و $\ell + \alpha$ عندما تكون x من D قريبة بقدر كاف من 0، وفي هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$.

2.1. التابع الاشتقاقيّ عند نقطة. العدد المشتق

سنهتمّ بالمسألة الآتية: ليكن f تابعاً معطى معرّفاً على D، ولتكن a نقطة من مجموعة تعريفه. نقرن بكل عددٍ h غير معدوم، يكون عنده $a+h$ عنصراً من D، العددَ $t(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

والسؤال هو: هل للتابع $h \mapsto t(h)$ نهاية حقيقيّة عند الصفر؟

إذا كان الجواب "نعم" قلنا إنّ التابع f اشتقاقيّ عند النقطة a.

تعريف 1

ليكن f تابعاً حقيقيّاً و a نقطة من مجموعة تعريفه. القول إنّ التابع f اشتقاقيّ عند a ومشتقه عند a يساوي ℓ، يكافئ القول إنّ للتابع $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية حقيقيّة ℓ عند الصفر.

نسمّي ℓ العدد المشتقّ للتابع f عند النقطة a ونكتب $f'(a)=\ell$.

تكريساً للفهم

ما النتائج الواجب معرفتها عن النهاية عند الصفر؟

إن نتائج من النمط $\lim_{x\to 0}(-4x+7)=7$ و $\lim_{x\to 0}\sqrt{2x+5}=\sqrt{5}$ بدَهيّة حدسياً وتبرّرها المبرهنات الآتية التي سنقبلها دون إثبات.

1. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ و $\lim_{x\to 0}x^2=0$ وبوجه عام $\lim_{x\to 0}x^n=0$ إذا كان $n>0$.
2. إذا كان P كثير حدود كان $\lim_{x\to 0}P(x)=P(0)$.
3. إذا كان F تابعاً كسرياً معرّفاً عند الصفر كان $\lim_{x\to 0}F(x)=F(0)$.
4. إذا كان P كثير حدود موجباً في جوار الصفر وكان F تابعاً كسريّاً معرّفاً عند الصفر وموجباً في جوار الصفر كان $\lim_{x\to 0}\sqrt{P(x)}=\sqrt{P(0)}$ وكان $\lim_{x\to 0}\sqrt{F(x)}=\sqrt{F(0)}$.
5. في حالة $\lim_{x\to 0}f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to 0}g(x)=\ell'$ لدينا

$$\lim_{x\to 0}\big(f+g\big)(x)=\ell+\ell' \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\big(f\cdot g\big)(x)=\ell\ell'$$

كيف نفهم التعاريف والرموز؟

يسمى العدد $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ معدّل تغير التابع f بين النقطتين a و $a+h$، ونرمز إليه عادة بالرمز $t(h)$. وهو معرّف عندما يكون h غير معدوم والعدد $a+h$ واقعاً ضمن مجموعة تعريف التابع f.

عندما نكتب معدّل تغير تابع فإنّ ذلك يعني أنّ الشرطين السابقين محقّقان.

- نرمز إلى العدد المشتق للتابع f عند النقطة a بالرمز $f'(a)$. فإذا كان f اشتقاقياً عند النقطة a كان

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال كيف نبرهن أنّ تابعاً f اشتقاقيّ عند a ؟

ليكن التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق $f(x) = x^2$. ادرس قابليّة اشتقاق f عند عدد حقيقي a واحسب $f'(a)$.

لدراسة قابليّة اشتقاق f عند a نطبّق التعريف 1 فنشكّل معدّل تغير التابع f بين a و $a+h$ ثمّ ندرس $\lim\limits_{h \to 0} t(h)$.

الحل إذا كان a عدداً حقيقيّاً، كان معدّل تغيّر التابع f بين النقطتين a و $a+h$ هو العدد

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ولما كان $f(x) = x^2$ ، كان

$$t(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

نستنتج أنّ $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2a$ ، وأنّ التابع f اشتقاقيّ عند النقطة a وأنّ $f'(a) = 2a$.

لما كانت النتيجة السابقة صحيحة أيّاً كان العدد a ، استنتجنا أنّ f اشتقاقي عند كلِّ عددٍ a وأنّ $f'(a) = 2a$. فعلى سبيل المثال f اشتقاقيٌّ عند -1 و $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$.

تَدَرَّبْ

① ليكن التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالصيغة $f(x) = 3x^2 - 4$. ادرس قابلية اشتقاق f عند 5 واحسب $f'(5)$.

② ليكن التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالصيغة $f(x) = x^3 - 1$. ادرس قابلية اشتقاق f عند 1 واحسب $f'(1)$.

بعض تطبيقات الاشتقاق عند نقطة

1.2. المماس لخطّ بياني

تعريف 2

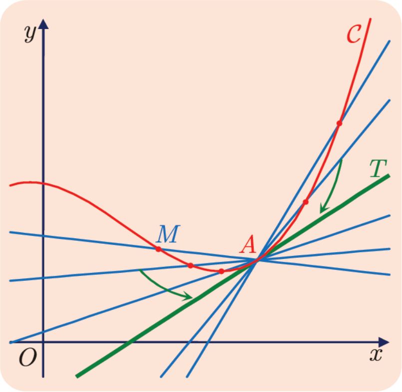
ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع f الاشتقاقي عند النقطة a. إنّ المماس لمنحني التابع f في النقطة $A(a, f(a))$ هو المستقيم المار بالنقطة A وميله $f'(a)$.

التأويل الهندسي

لتكن M النقطة من الخطّ البياني $\mathcal{C}$ التي فاصلتها $a+h$ $(h \neq 0)$. إنّ معدّل تغير التابع f، أي $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ هو ميل المستقيم (AM). ولما كانت

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

أمكننا اعتبار المستقيم (T) المارّ بالنقطة A وميله $f'(a)$، هو الوضع النهائيّ للمستقيمات (AM) عندما تقترب النقطة M من النقطة A مع بقائها على المنحني $\mathcal{C}$.

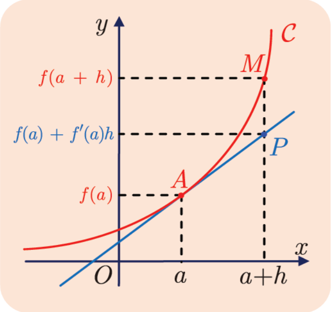


تعطى معادلة المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة $A(a, f(a))$ بالعلاقة

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

نعلم في الواقع أنّ ميل المماس هو $f'(a)$ وعليه تكتب معادلة المماس بالصيغة $y = f'(a)x + p$ ولمّا كان المماس يمرّ بالنقطة $A(a, f(a))$ استنتجنا من ذلك أنّ $p = f(a) - af'(a)$ ونجد المعادلة المطلوبة بتعويض قيمة p في معادلة المماس.

2.2. التقريب التآلفي المحلي



ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني لتابع f اشتقاقيّ عند النقطة a، وليكن T المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة $A\left(a, f(a)\right)$. يظهر من الرسّم أنّ المستقيم T قريب من المنحني $\mathcal{C}$ في جوار النقطة A، ويمكننا إذن أن نستبدل بالمنحني $\mathcal{C}$ المستقيم T بقرب النقطة A. بعبارة أخرى نستبدل محليّاً بالتابع f التابع التآلفي المعرّف بالمستقيم T، أي إنّنا نستبدل بالعدد الحقيقي $f(a+h)$ العددَ الحقيقيّ $f(a)+hf'(a)$ عندما تكون h قريبة من الصفر.

يعطي أي مستقيم مار بالنقطة A تقريباً تآلفيّاً للتابع f ونقبل أنّ أفضل تقريب هو التقريب الذي نحصل عليه باختيار المماس في النقطة A.

تمثّل المسافة MP القيمة المطلقة للخطأ المرتكب.

تكريساً للفهم

ما فائدة التقريب التآلفي المحلّي؟

- إنّه يفيد في تبسيط الحسابات. فمثلاً، سنرى في التمارين أنّ $1+\frac{h}{2}$ هو التقريب التآلفي المحلّي للتابع $h \mapsto \sqrt{1+h}$، ومن الواضح أنّ حساب $1+\frac{h}{2}$ أبسط من حساب $\sqrt{1+h}$. ولكن لا فائدة من هذا التقريب إذا لم نكن نعرف حدّاً أعلى للخطأ المرتكب وهو في هذه الحالة $\frac{h^2}{8}$.
- على العموم، استطاع الرياضيّاتيّون تقريب التوابع محلّياً بكثيرات حدود وحساب تقدير للخطأ المرتكب. ولكن لماذا التقريب بكثيرات الحدود؟ لأنّ حساب $P(x)$ لا يتطلّب إلا عمليّتي الجمع والضرب. فمثلاً $P(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$ تقريبٌ محلّي في جوار الصفر للتابع $x \mapsto \sin x$ بواسطة كثير حدود من الدّرجة الخامسة.

كيف يتدخل الاشتقاق في باقي العلوم؟

- لمعدّل تغيّر تابع f بين النقطتين a و $a+h$، $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$، مدلول ملموس فهو يفيدنا في قياس التغيّر الوسطي لمقدار ما.

مثال

إذا تحركت نقطة ماديّة على محور ودلَّ $S(t)$ على المسافة المقطوعة إلى اللّحظة t، دلّ العدد $\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$ على السّرعة الوسطيّة للمتحرّك بين اللّحظتين t_0 و t_0+h. يتيح لنا مفهوم العدد المشتق تعريف قياسات لحظيّة. إذ نعرّف السرعة اللّحظية لنقطة ماديّة تتحرّك على محور في اللّحظة t_0 بأنّها

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$$

فهي إذن العدد المشتّق للتابع $t \mapsto S(t)$ عند t_0.

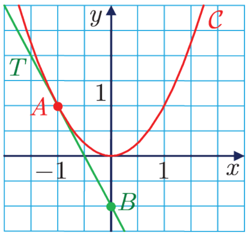
مثال معادلة مماس ورسمه

اكتب معادلة المماس لمنحني التابع $f : x \mapsto x^2$ في النقطة التي فاصلتها -1 ثمّ ارسم هذا المماس.

الحل

- وجدنا في مثال سابق أنّ f اشتقاقيّ عند -1 وأنّ $f'(-1) = -2$. وعليه يقبل الخطّ البياني للتابع f مماساً T في النقطة التي فاصلتها -1 معادلته، وفق ما درسناه، هي

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) \quad \text{أي} \quad y = -2x - 1 .$$



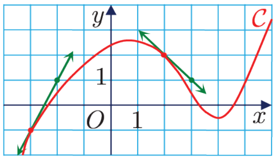
- نعلم أنّ المماس يمرّ بالنقطة $A(-1,1)$، لرسمه علينا تعيين نقطة ثانية منه. فمثلاً $B(0,-1)$ تحقّق معادلة المماس فهي واقعة عليه والمماس هو المستقيم (AB) نفسه.

تَدرَّبْ

① عيّن معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

1. $a = 0$ $\quad f(x) = x^3$
2. $a = 1$ $\quad f(x) = -x + 4$
3. $a = 1$ $\quad f(x) = -x^2 + 2$

② نجد في الشكل المجاور الخطّ البياني لتابع اشتقاقي f. تأمّل الشكل، وأجب عن الأسئلة الآتية.



1. اكتب معادلة المماسين المبيّنين في الشكل.
2. استنتج تقريباً تآلفيّاً محليّاً لكلٍّ من $f(-3+h)$ و $f(2+h)$.

3 مشتقّات التوابع المألوفة

1.3. التابع المشتق

تعريف 3

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجموعة D_f وليكن I مجالاً أو اجتماع مجالات محتوى في D_f. نقول إنّ f اشتقاقي على I إذا كان اشتقاقيّاً عند كل نقطة من I وفي هذه الحالة نسمّي التابع الذي يقرن بكل x من I العدد المشتق $f'(x)$ التابع المشتقّ للتابع f ونرمز إليه بالرمز f'.

مثال وجدنا في مثال سابق أنّ التابع $f : x \mapsto x^2$ اشتقاقي عند كل عدد حقيقي a وأنّ $f'(a) = 2a$. نستنتج أنّ f اشتقاقيّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وأنّ تابعه المشتقّ هو التابع المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق $f' : x \mapsto 2x$.

2.3. التوابع المشتقة لبعض التوابع المألوفة

مُبرهَنة 1

كلّ تابع تآلفي $f : x \mapsto mx + p$ تابعٌ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، ومشتقّه التابع الثابت $f' : x \mapsto m$.

الإثبات

إذا كان $h \neq 0$ كان

$$t(h) = \frac{m(a+h) + p - am - p}{h} = m$$

أي إنّ التابع t هو التابع الثابت $h \mapsto m$. نستنتج أنّ $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = m$.

نتيجة

- إنّ مشتق التابع $f : x \mapsto x$ هو التابع المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق $f'(x) = 1$. ضع $m = 1$ و $p = 0$ في المبرهنة السّابقة.
- إنّ مشتق التابع الثابت $f : x \mapsto p$ هو التابع المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق $f'(x) = 0$. ضع $m = 0$ في المبرهنة السّابقة.

مُبرهَنة 2

التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ وتابعه المشتقّ هو التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

الإثبات

أياً كان $a > 0$ و $h \neq 0$ كان

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

وبضرب البسط والمقام بالمقدار $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ نجد

$$t(h) = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

ونستنتج من العمليّات على نهايات التوابع أنّ

$$\lim_{h \to 0}\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right) = 2\sqrt{a}$$

وعليه يكون $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. إذن f اشتقاقي عند a و $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

مُبرهَنة 3

1. التابع $f : x \mapsto \sin x$ اشتقاقيّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه على هذه المجموعة هو $f' : x \mapsto \cos x$.
2. التابع $f : x \mapsto \cos x$ اشتقاقيّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه على هذه المجموعة هو $f' : x \mapsto -\sin x$.

تُقبل هذه المبرهنة دون إثبات.

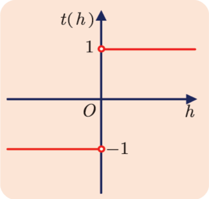
تكريساً للفهم

كيف نستعمل التابع f' ؟

تُمكّننا معرفة التابع المشتقّ من الحساب السريع للعدد المشتق عند نقطة، إضافة إلى كونها تعفينا من حساب $\lim\limits_{h \to 0} t(h)$.

مثال وجدنا أنّ التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ وتابعه المشتقّ هو التابع $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. نستنتج أنّ f اشتقاقي عند 1 وأنّ $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

لماذا لا يقبل التابع $f : x \mapsto |x|$ الاشتقاق عند الصفر ؟



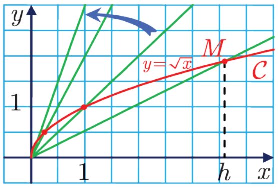
لأنّه ليس لمعدّل تغير هذا التابع نهاية عند الصفر، ذلك أنّ معدّل التغير بين 0 و $0+h$ هو $t(h) = \dfrac{|h|}{h}$. إذن $t(h) = 1$ في حالة $h > 0$، و $t(h) = -1$ في حالة $h < 0$. فلا يمكن أن يقبل التابع $h \mapsto t(h)$ نهاية عند الصفر، فمثلاً عندما تتحوّل h في المجال $]-0.01, 0.01[$ لا تتجمّع قيم $t(h)$ حول العدد الحقيقي نفسه ℓ.

التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ غير قابل للاشتقاق عند الصفر، لماذا؟

لأنّه ليس لمعدّل تغير هذا التابع نهاية حقيقيّة عند الصفر، ذلك أنّ معدّل التغير بين 0 و $0+h$ هو $t(h) = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. فعندما تصبح قيم h قريبة جداً من الصفر تصبح قيم $\sqrt{h}$ قريبة أيضاً من الصفر لأنّ $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$. وعندما نحسب مقلوب أعداد موجبة تماماً وقريبة من الصفر نحصل على أعداد لا متناهية في الكبر ولا يمكن أن تتجمّع حول قيمة حقيقيّة ثابتة.

لماذا يقبل، مع ذلك، منحني التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ مماساً عند الصفر؟

وجدنا أنّ التابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ غير قابل للاشتقاق عند الصفر وأنّ $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ يصبح لا متناهياً في الكبر عندما تقترب h من الصفر. لكن إذا كانت M النقطة من الخطّ البياني للتابع f التي فاصلتها h مع $h > 0$، كان $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ميل المستقيم (OM). فإذا اقتربت النقطة M من النقطة O مع بقائها على منحني التابع f لاحظنا أنّ الوضع النهائي للمستقيمات (OM) هو محور التراتيب.



نقول إنّه مع كون التابع f غير قابل للاشتقاق عند الصفر، فإنّ لخطّه البياني مماساً في هذه النقطة هو محور التراتيب. ونقول أيضاً إنّ لمنحني التابع f مماساً شاقوليّاً في النقطة O.

تدرَّبْ

احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة ثم احسب $f'(a)$.

❶ $f(x) = -\sqrt{3}, \quad a = 0$ ❷ $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

❸ $f(x) = 3x - 1, \quad a = -1$ ❹ $f(x) = \sin x, \quad a = \dfrac{\pi}{2}$

4 العمليّات على التوابع الاشتقاقيّة

تنويه مهم: يجد القارئ في هذه الفقرة إثبات مُعظم الخواصّ، ولكن يمكن ترك الإثبات إلى قراءة ثانية والاكتفاء بمعرفة الخواصّ والتمكّن من تطبيقها.

1.4. مشتق مجموع تابعين

مُبرهَنة 4

إذا كان u و v اشتقاقيّين على المجموعة D، كان $u+v$ اشتقاقيّاً على D وكان

$$\left(u+v\right)' = u' + v'$$

الإثبات

إذا كان a من D كان

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \end{aligned}$$

نضع

$$t_2(h) = \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \quad \text{و} \quad t_1(h) = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

لما كان كل من u و v اشتقاقيّاً عند a كان $\lim_{h\to 0} t_1(h) = u'(a)$ و $\lim_{h\to 0} t_2(h) = v'(a)$. نستنتج إذن أنّ $\lim_{h\to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$. ولمّا كانت هذه النتيجة صحيحة أيّاً كان a من D. استنتجنا أنّ $\left(u+v\right)' = u' + v'$.

2.4. مشتق جداء ضرب تابعين

مُبرهَنة 5

إذا كان u و v اشتقاقيين على المجموعة D، كان $u \cdot v$ اشتقاقيّاً على D وكان

$$\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

وبوجه خاصّ إذا كان λ عدداً حقيقيّاً كان $\left(\lambda v\right)' = \lambda v'$.

الإثبات

إذا كان a من D كان

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(u\cdot v)(a+h)-(u\cdot v)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)\cdot v(a+h)-u(a)\cdot v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\cdot v(a+h)+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\cdot u(a) \end{aligned}$$

وبالمحافظة على الرّموز الواردة في المبرهنة السّابقة، نجد

$$t(h)=t_1(h)\cdot v(a+h)+u(a)\cdot t_2(h)$$

ولكن $v(a+h)=v(a)+ht_2(h)$، ولما كان v اشتقاقيّاً عند a استنتجنا $\lim_{h\to 0} v(a+h)=v(a)$.

إنّ كلٌّ من u و v اشتقاقي عند a إذن

$$\lim_{h\to 0} t(h)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$$

هذه النتيجة صحيحة أيّاً كان a من D. ينتج من ذلك أنّ $\left(u\cdot v\right)'=u'v+uv'$.

إذا كان λ عدداً حقيقياً وكان $u:x\mapsto\lambda$ كان $u':x\mapsto 0$ ومنه $\left(\lambda v\right)'=\lambda v'$.

مُبرهَنة 6

1. أيّاً كان العدد الطبيعي غير المعدوم n، كان التابع $x\mapsto x^n$ اشتقاقيّاً على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه التابع $x\mapsto nx^{n-1}$.
2. كلُّ كثير حدود $P:x\mapsto a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ اشتقاقي على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه هو

$$P':x\mapsto na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$$

الإثبات

1. نضع $f_n:x\mapsto x^n$. نعلم أن النتيجة صحيحة في حالة $n=1$ و $n=2$. لحساب f_3' نكتب $f_3=f_1\cdot f_2$ وبتطبيق المبرهنة 5، نجد أنّ f_3 اشتقاقي على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وأنّه أيّاً كان العدد الحقيقي x كان

$$f_3'(x)=\left(1\times x^2\right)+\left(x\times 2x\right)=3x^2$$

يمكننا بهذه الطريقة التقدّم خطوة خطوة لأنّنا إذا أثبتنا أنّ $f_p'(x)=px^{p-1}$ استنتجنا أنّ $f_{p+1}'(x)=(p+1)x^p$ وذلك بأن نكتب $f_{p+1}=f_1\cdot f_p$.

2. إنّ هذه القضية نتيجة للقضيّة السابقة وللمبرهنتين 4 و 5.

3.4. مشتق مقلوب تابع

مُبرهَنة 7

إذا كان v اشتقاقيّاً على D وكان $v(a) \neq 0$ وذلك أيا كان a من D كان $\frac{1}{v}$ اشتقاقيّاً على D وكان $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

الإثبات

ليكن a عنصراً من D. لما كان v اشتقاقيّاً عند a كان $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$. ولما كانت قيم $v(a+h)$ غير معدومة أيضاً عندما تكون h في جوار الصفر أمكننا تعريف نسبة تزايد التابع $\frac{1}{v}$ وهي

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)\cdot v(a)}\right] \\ &= -\frac{1}{v(a+h)\cdot v(a)}\left[\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right] \end{aligned}$$

ومنه نجد أنّ $\lim_{h\to 0} t(h) = -\frac{1}{v(a)\cdot v(a)} \times v'(a) = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$ وهو المطلوب، لأنّ هذه العلاقة صحيحة عند كلّ نقطة a من D.

مُبرهَنة 8

أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$، كان $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ اشتقاقيّاً على $\mathbb{R}^*$ ومشتقه هو $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$.

الإثبات

أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$، نضع $v(x) = x^n$ فيكون $f(x) = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{v(x)}$. ولأنّ v اشتقاقي على مجموعة الأعداد الحقيقيّة، فهو اشتقاقيّ على $\mathbb{R}^*$، وإذا كان $x \neq 0$ كان $v(x) \neq 0$. نستنتج وفقاً للمبرهنة 7، أنّ f اشتقاقيّ على $\mathbb{R}^*$ وفي حالة $x \neq 0$ لدينا :

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

فكِّرْ

يمكن جمع المبرهنتين 6 و 8 معاً بالقول إنّ مشتقّ $x \mapsto x^m$ هو $x \mapsto mx^{m-1}$ في حالة عدد صحيح غير معدوم m.

4.4. مشتق خارج قسمة تابعين

مُبرهَنة 9

إذا كان u و v اشتقاقيين على D، وكان $v(a) \neq 0$ أيّاً كان العدد الحقيقي a من D، كان التابع $\frac{u}{v}$ اشتقاقيّاً على D، وكان

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

الإثبات

نكتب التابع $\frac{u}{v}$ بالشكل $u \times \frac{1}{v}$، ثم نستفيد تِباعاً من المبرهنتين 5 و 7 فنجد المطلوب.

5.4. مشتق التابع $x \mapsto u(ax+b)$

مُبرهَنة 10

ليكن u تابعاً اشتقاقيّاً على D، وليكن a و b عددين حقيقيين، ولتكن J مجموعة الأعداد x التي تجعل $ax+b$ عنصراً من D. عندئذ يكون التابع $f : x \mapsto u(ax+b)$ اشتقاقياً على J، ومشتقّه هو التابع

$$x \mapsto f'(x) = au'(ax+b)$$

التابع f هو ناتج تركيب التابعين $x \mapsto ax+b$ ثُمّ u.

تكريساً للفهم

كيف نطبّق المبرهنة 10؟

تفيدنا هذه المبرهنة بوجه خاصّ في إثبات ما يلي:

- التابع $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ اشتقاقيّ على المجال $J =]-b/a, +\infty[$ إذا كان $a > 0$ أو على المجال $J =]-\infty, -b/a[$ إذا كان $a < 0$ ومشتقّه على J هو التابع

$$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

- التابع $x \mapsto \cos(ax+b)$ اشتقاقيّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه على $\mathbb{R}$ هو التابع $x \mapsto -a\sin(ax+b)$.
- التابع $x \mapsto \sin(ax+b)$ اشتقاقيّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه على $\mathbb{R}$ هو التابع $x \mapsto a\cos(ax+b)$.

مثال مشتق مجموع

نتأمّل التابع $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$ المعرّف على $[0,+\infty[$. احسب $f'(x)$.

الحل

نلاحظ أنّ f يساوي مجموع التابعين $u : x \mapsto x$ و $v : x \mapsto \sqrt{x}$. التابعان u و v اشتقاقيان على $I =]0,+\infty[$، وأيّاً كان x من I كان $u'(x) = 1$ و $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. إذن بالاستفادة من المبرهنة 4. نستنتج أنّ f اشتقاقي على I، وأنّه مهما تكن x من I يكن

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال مشتق تابع كثير الحدود

التابع f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x + 3$. احسب $f'(x)$.

الحل

نلاحظ أنّ f تابعٌ كثير الحدود من الدرجة الثالثة، فهو إذن اشتقاقي على $\mathbb{R}$ عملاً بالمبرهنة 6. نطبّق إذن هذه المبرهنة بالأسلوب الموضّح فيما يلي :

$$\begin{array}{rclcccccc} f(x) & = & 5 & & \boxed{x^3} - 3 & & \boxed{x^2} + 10 & & \boxed{x} + 3 \\ f'(x) & = & 5 & \times & \boxed{3x^2} - 3 & \times & \boxed{2x} + 10 & \times & \boxed{1} + 0 \end{array}$$

فالتابع المشتقّ $f'(x)$ هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$$

مثال مشتق جداء ضرب

أثبت أنّ التابع $f : x \mapsto (3x^2 + 1)\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$، واحسب $f'(x)$.

الحل

نلاحظ أنّ f يساوي جداء ضرب التابعين $u : x \mapsto 3x^2 + 1$ و $v : x \mapsto \sqrt{x}$. ولكنّ التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$، و $u' : x \mapsto 6x$. وكذلك، نرى أنّ التابع v اشتقاقي على I، و $v' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. وبالاستفادة من المبرهنة 5. نستنتج أنّ f اشتقاقي على I، وأنّه مهما تكن x من I يكن :

$$f'(x) = 6x \times \sqrt{x} + (3x^2 + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{15}{2} x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال مشتق نسبة تابعين

أثبت أنّ التابع $f : x \mapsto \dfrac{2x - 1}{-3x + 1}$ اشتقاقيّ على مجموعة تعريفه وعيّن التابع المشتق.

الحل

- نلاحظ أنّ $f = \dfrac{u}{v}$ مع $u : x \mapsto 2x - 1$ و $v : x \mapsto -3x + 1$. ينعدم $v(x)$ إذا وفقط إذا كان $x = \dfrac{1}{3}$. نستنتج أنّ التابع f معرّف على المجموعة $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
- التابعان u و v اشتقاقيّان على $\mathbb{R}$ (تابعان تآلفيّان) فهما اشتقاقيّان على D_f. ولمّا كان v لا ينعدم على D_f استنتجنا وفقاً للمبرهنة 9 أنّ f اشتقاقي على D_f وأنّه أياً كان x من D_f كان

$$f'(x) = \frac{2(-3x+1) - (2x-1)(-3)}{(-3x+1)^2} = \frac{-1}{(-3x+1)^2}$$

نبرهن بالطريقة ذاتها أنّ أيّ تابع كسري اشتقاقيٌّ على مجموعة تعريفه.

مثال

أثبت أنّ التابع $f : x \mapsto \sqrt{-2x+4}$ اشتقاقيّ عند 1، ثمّ احسب $f'(1)$.

الحل

- نلاحظ أنّ $f(x) = u(-2x+4)$، حيث $u : x \mapsto \sqrt{x}$ هو تابع اشتقاقي على $D =]0, +\infty[$، ومشتقه التابع $u' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- نستنتج، بناءً على المبرهنة 10، أنّ التابع f اشتقاقي على J مجموعة العناصر x التي تجعل $-2x + 4 > 0$ أي على $J =]-\infty, 2[$. ونجد وفقاً للمبرهنة نفسها أنّه إذا كان x من J كان

$$f'(x) = -2u'(-2x+4) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{-2x+4}} = \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}}$$

نستنتج أنّ f اشتقاقي عند 1، وأنّ $f'(1) = \dfrac{-1}{\sqrt{-2 \times 1 + 4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

تَدرَّبْ

احسب فيما يأتي المشتقّات f'، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$
2. $f(x) = x + \sqrt{x+3}$
3. $f(x) = \sin(2x + \pi)$
4. $f(x) = \dfrac{5x - 4}{2x - 3}$
5. $f(x) = x + \cos(3x)$
6. $f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = x \sin 2x + \pi$
8. $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$

الخلاصة

التابع	المشتقّ	ملاحظات
$x \mapsto mx+p$	$x \mapsto m$	
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \left]0,+\infty\right[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$u+v$	$u'+v'$	تنبّه إلى الشروط الواجب تحقّقها عند تطبيق هذه العلاقات
uv	$u'v+uv'$	
λu (λ ثابت)	$\lambda u'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$	

مثال

- مشتق $f : x \mapsto \cos(3x-4)$. هنا $f(x)=u(ax+b)$ حيث $u : x \mapsto \cos x$ و $a=3$ إذن $f'(x)=-3\sin(3x-4)$.
- مشتق $f : x \mapsto \sin(-5x+2)$. هنا $f(x)=u(ax+b)$ حيث $u : x \mapsto \sin x$ و $a=-5$ إذن $f'(x)=-5\cos(-5x+2)$.
- مشتق $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$. هنا $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ حيث $u : x \mapsto x^2$ و $v : x \mapsto x+1$ إذن f اشتقاقيّ على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ و $u'(x)=2x$ و $v'(x)=1$ وعليه يكون

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

أفكار يجب تَمثُّلها

- يؤول البحث عن العدد المشتق وفقاً للعلاقة $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إلى حساب نهاية عند الصفر. ولحسن الحظ تعفينا معرفة التابع المشتق من حساب هذه النهاية عند كلّ نقطة يكون f اشتقاقيّاً عندها.

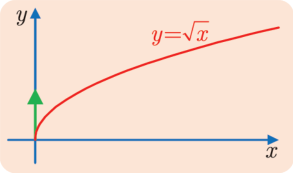
مثال

لحساب العدد المشتقّ للتابع $f : x \mapsto x^2 + 1$ عند النقطة $x = 1$. نحدّد أولاً التابع المشتقّ ونكتب $f' : x \mapsto 2x$ فيكون $f'(1) = 2 \times 1 = 1$.

- إذا كان f اشتقاقيّاً عند النقطة a قَبِلَ خطّه البياني مماساً في النقطة $A(a, f(a))$. ميل هذا المماس يساوي $f'(a)$ فهو إذن مماس أفقيّ أو مائل ولكنه لا يكون شاقولياً. ولكن هناك منحنيات لتوابع تقبل مماساً شاقوليّاً عند نقطة $A(a, f(a))$ من المنحني دون أن يكون التابع الذي يمثله المنحني اشتقاقيّاً عند النقطة a.

مثال

تابع الجذر التربيعي معرّف عند الصّفر وغير قابل للاشتقاق عند الصفر ويقبل منحنيه مماساً شاقوليّاً في النقطة $A(0,0)$ منه.



- إضافة ثابت إلى تابع لا يغيّر من عبارة التابع المشتقّ.

مثال

للتابعين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^2 + 5$ المشتقّ نفسه.

- عند ضرب تابع بعدد حقيقيّ λ نضرب المشتقّ بالعدد الحقيقيّ نفسه.

- من المفيد عند حساب التابع المشتق f' للتابع f كتابة التابع f بصيغة مجموع أو جداء أو نسبة ومن ثمّ تطبيق المبرهنات أو الجدول التلخيصيّ.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- لحساب $f'(x)$ بالاستفادة من العمليّات الجبريّة، ومنعاً من ارتكاب أخطاء، لا تتردّد بكتابة التوابع المرحليّة التي تستعملها بوضوح.

مثال

ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. يمكننا أن نكتب $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ إذْ $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=x+1$. التابع u اشتقاقيّ على المجال $I=]0,+\infty[$ ، والتابع v اشتقاقيّ ولا ينعدم على I . إضافة إلى ذلك لدينا $v'(x)=1$ و $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. إذن يمكننا أن نكتبَ، أيّاً كانت x من I ، ما يلي :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

■ لتعيين معادلة للمماس للخطّ البياني C_f في النقطة A التي فاصلها a ، تذكّر أوّلاً أنّ ميل هذا المماس يساوي $f'(a)$ ، فلمعادلته المختزلة الصيغة $y=f'(a)x+b$ ، ثُمّ تذكّر أنّه يمرّ بالنقطة A وهذا ما يسمح بتعيين b.

مثال

ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع $f(x)=x^3+1$ ، ولتكن A النقطة من $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 2. إنّ التابع f تابعٌ اشتقاقي عند 2 ولدينا $f'(2)=3\times(2)^2=12$. إذن هناك مماس للخطّ البيّاني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 2، ولمعادلته الصيغة $y=12x+b$. يمرّ هذا المماس بالنقطة التي إحداثيّاتها $(2,f(2))$ أي $(2,9)$. إذن $9=12\times2+b$ ، أو $b=-15$ ، فمعادلة المماس المطلوب هي $y=12x-15$.

أخطاء يجب تجنّبها.

■ إنّ مشتق التابع $x\mapsto f(ax+b)$ هو $x\mapsto af'(ax+b)$ فلا تنسَ المقدار «a».

■ لا تظنَّن أنّ التوابع تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها.

مثال

التابع $x\mapsto\sqrt{x}$ معرّف عند 0، ولكنّه ليس اشتقاقيّاً عند 0.

أنشطة

نشاط 1 إنشاءُ مُماسات هندسيّاً

❶ حالة القطع المُكافئ $y = x^2$

ليكن $\mathcal{P}$ القطع المُكافئ الذي مُعادلته $y = x^2$ في مَعْلَم متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ولتكن A نقطة ما من $\mathcal{P}$ فاصلتها a و $a \neq 0$. لإنشاء المماس في A للقطع $\mathcal{P}$ نتبع الخطوات الآتية:

① نُنشئ المسقط القائم H للنقطة A على محور التراتيب.

② نُنشئ I نظيرة النقطة H بالنسبة إلى O.

③ نرسم المستقيم (IA) فيكون المماس في A للقطع $\mathcal{P}$.

علّل صحّة هذا الإنشاء.

❷ حالة القطع المُكافئ $y = ax^2 + bx + c$

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0$. وليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع f في مَعْلَم متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ولتكن A و B نقطتان كيفيّتان من الخطّ البياني $\mathcal{C}$ فاصلتاهما α و β بالترتيب. نفترض أنّ $\alpha \neq \beta$.

1. أثبت أنّه يوجد مماس وحيد للخطّ البياني $\mathcal{C}$ يكون موازياً للمستقيم (AB)، وأنّ فاصلة نقطة التماس الموافقة هي المتوسطّ الحسابي لفاصلتي النقطتين A و B.
2. استنتج إنشاءً هندسيّاً للمماس للخطّ البياني $\mathcal{C}$ في نقطة منه.
3. أنشئ فعليّاً المماسات للخطّ البياني الذي معادلته $y = -x^2 + 3$ في النقاط التي فواصلها -1 و 1 و 2.

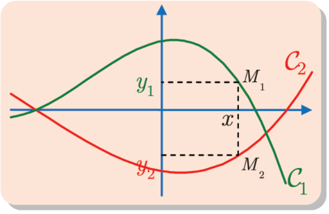
❸ حالة القطع الزائد $y = \dfrac{1}{x}$

ليكن $\mathcal{H}$ القطع الزائد الذي معادلته $y = \dfrac{1}{x}$ في مَعْلَم متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ولتكن M نقطة من $\mathcal{H}$ فاصلتها a مع $a \neq 0$.

1. اكتب معادلة المماس للخطّ البياني $\mathcal{H}$ في M.
2. احسب إحداثيات A و B نقطتي تقاطع هذا المماس مع محور الفواصل ومحور التراتيب.
3. أثبت أنّ M هي منتصف القطعة $[AB]$. ثمّ ارسم شكلاً يوضّح ما أثبتّه.
4. استنتج طريقة الإنشاء الهندسيّ لمماس للخطّ البياني $\mathcal{H}$ في نقطة منه.

2

نشاط 2 الوضع النسبي لخطّ بياني ومماساته



بوجه عام، تعيين الوضع النسبي لمنحنيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ معادلتاهما $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ بالترتيب. هو إيجاد مجالات أعظميّة من حيث طولها، يكون عليها $\mathcal{C}_1$ فوق $\mathcal{C}_2$، إذْ نقول إنّ النقطة $M_1(x,y_1)$ من $\mathcal{C}_1$ تقع فوق النقطة $M_2(x,y_2)$ من $\mathcal{C}_2$ عندما $y_1 \geq y_2$.

إذن تؤول المسألة إلى إيجاد مجموعة قيم x التي تُحقّق $f_1(x) \geq f_2(x)$.

❶ القطع المكافئ والمماسات

ليكن $\mathcal{P}$ القطع المُكافئ الذي مُعادلته $y = x^2$ في مَعْلَم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. ولتكن M نقطة ما من $\mathcal{P}$ فاصلتها a و $a \neq 0$.

1. اكتب معادلة للمماس T_a للقطع $\mathcal{P}$ في M.
2. أثبت أنّ دراسة وضع القطع $\mathcal{P}$ بالنسبة إلى T_a تؤول إلى حلّ المتراجحة

$$x^2 - 2ax + a^2 \leq 0$$

بالنسبة إلى المتحوِّل x.

3. استنتج أنّ القطع $\mathcal{P}$ يقع فوق جميع مُماساته.

❷ الخطّ البياني الذي معادلته $y = x^3$

ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني الذي مُعادلته $y = x^3$، ولتكن M نقطة ما من $\mathcal{C}$ فاصلتها a.

1. اكتب معادلة للمماس T_a للقطع $\mathcal{P}$ في M.
2. أثبت أنّ دراسة وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى T_a تؤول إلى حلّ المتراجحة

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 \leq 0 \qquad (1)$$

بالنسبة إلى المتحوِّل x.

3. ❶ أثبت أنّ $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x-a)(x^2+ax-2a^2)$.
   ❷ استنتج تِبعاً لقيم a حلَّ المتراجحة (1).
   ❸ استنتج تِبعاً لقيم a وضع الخطّ البياني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى T_a.

تمرينات ومسائل

1 استعمل تعريف العدد المشتق، لإثبات وجود مشتق التابع f عند a وحسابه في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $f(x) = -2x + 3, \quad a = 3$

② $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$

③ $f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad a = 2$

④ $f(x) = 2x + p, \quad a = 2$

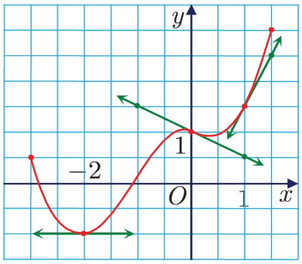
⑤ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad a = 0$

⑥ $f(x) = 2x^3 - 6x, \quad a \in \mathbb{R}$

⑦ $f(x) = x^3 + 1, \quad a \in \mathbb{R}$

⑧ $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad a \neq 0$

2 نجد في الشكل المجاور الخطّ البياني لتابع اشتقاقيّ f. تأمّل الشكل، واملأ الفراغات فيما يأتي.



$f(0) = \cdots, \quad f'(0) = \cdots$

$f(-2) = \cdots, \quad f'(-2) = \cdots$

$f(1) = \cdots, \quad f'(1) = \cdots$

3 اكتب معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

① $f(x) = -x + 4, \quad a = 1$

② $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 4$

③ $f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad a = 2$

④ $f(x) = 2x + p, \quad a = 3$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad a = 0$

⑥ $f(x) = x^3 + 4x, \quad a = 2$

⑦ $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1, \quad a = 1$

⑧ $f(x) = x^2 + x, \quad a \in \mathbb{R}$

4 أثبت فيما يأتي أنّ التابع المعطى f اشتقاقيّ على المجموعة D، واحسب تابعه المشتقّ.

① $f : x \mapsto -x + 4, \quad D = \mathbb{R}$

② $f : x \mapsto x^2 + 3, \quad D = \mathbb{R}$

③ $f : x \mapsto 2x^2 - x + 2, \quad D = \mathbb{R}$

④ $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}, \quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

5 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ أو $f'(t)$ أو $f'(u)$ ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

① $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$ ② $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \pi x$

③ $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}$ ④ $f(t) = \dfrac{4t^5}{5}$

⑤ $f(u) = (2u+3)(5u+1)$ ⑥ $f(u) = \left(\sqrt{u}+1\right)^2$

⑦ $f(t) = t\sin t$ ⑧ $f(x) = -2\cos x + x^2$

6 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 5$$

① أثبت أنّ الخطّ البياني للتابع f يقبل مماسات عند كلّ نقطة من نقاطه.

② أيقبل الخطّ البياني للتابع f مماسات توازي محور الفواصل؟

7 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

① $f(x) = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{2}{5x}$ ② $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

③ $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$ ④ $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

⑦ $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{4-x}$ ⑧ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

① أثبت أنّ f اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ واحسب $f'(x)$.

② أوجد معادلة للمماس في النقطة التي فاصلتها a للخطّ البياني للتابع f .

9 ليكن f التابع المعرّف على $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ بالعلاقة

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

أثبت أنّ f اشتقاقيّ على I واحسب $f'(x)$. وتحقَّق أنّه مهما تكن x من I يكن

$$f'(x) = 1 + f^2(x)$$

10 تعيين تابع كثير الحدود

ليكن f تابعاً كثير الحدود من الدّرجة الثّانية، وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في مَعْلَم متجانس. نفترض أنّ النقطة $A(1,6)$ تقع على $\mathcal{C}$ وأنّ المماس T للخطّ البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 2 يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 10x - 5$ وأخيراً أنّ $f(2) = 13$.

عين التابع f في حال وجوده.

نحو الحلّ

- يتعيّن كثير الحدود بمعرفة مُعاملاته. نفكِّر إذن بكتابة $f(x) = ax^2 + bx + c$ والأعداد a و b و c أعداد حقيقيّة. نريد معرفة إذا كان بالإمكان تعيين هذه المُعاملات كي تتحقّق الشروط المُعلن عنها في نص التمرين.

1. علّل صحة الخاصتين الآتيتين:
   - يمرّ $\mathcal{C}$ بالنقطة A يُكافئ $f(1) = 6$.
   - يوازي المماسُ T المستقيمَ الذي معادلته $y = 10x - 5$ يُكافئ $f'(2) = 10$.
2. أثبت أنّ المسألة المطروحة تُكافئ: أتوجد أعداد a و b و c تُحقّق ما يأتي ؟

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 13 \end{cases}$$

- لستَ مُعتاداً على حلِّ جمل معادلات مثل هذه، ولكنّ المعادلة الأولى لا تضم إلاّ مجهولين، فهي تتيح لنا مثلاً التعبير عن b بدلالة a.

1. تحقّق أنّ جملة المعادلات السابقة تُكافئ

$$\begin{cases} b = 10 - 4a \\ -3a + c = -4 \\ -4a + c = -7 \end{cases}$$

2. احسب a و c ثُمّ استنتج b؟ ماذا تستنتج؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

11 وجود وحساب المشتق

ليكن f التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بالعلاقة، $f(x)=2\sqrt{x+1}+\frac{1}{x+3}$. احسب $f'(x)$
وعيِّن مجموعة قيم x التي تكون عندها الحسابات صحيحة.

نحو الحلّ

- لنتأمّل صيغة التابع المعطى. يظهر التابع f بصيغة مجموع تابعين $u(x)=2\sqrt{1+x}$ و $v(x)=\frac{1}{x+3}$ معرّفين على $[0,+\infty[$.
في حال كون التابعين u و v اشتقاقيّين على $[0,+\infty[$ فأيُّ مبرهنة تفيدك في حساب $f'(x)$ ؟
- علينا إذن دراسة قابليّة اشتقاق التابعين u بدلالة v ، ولهذا نستفيد من مبرهنات الاشتقاق.

1. أثبت أنّ u اشتقاقيّ على $]-1,+\infty[$ وأنّه في حالة $x>-1$ لدينا

$$u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

2. أثبت أنّ v اشتقاقيّ على $]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$ وإذا كان $x\neq -3$ كان

$$v'(x)=\frac{-1}{(x+3)^2}$$

3. أنجز حساب $f'(x)$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

12 المماسات المارة بنقطة معطاة لخط بياني

في مَعلَم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخطّ البياني للتابع $f:x\mapsto \frac{x^2}{2}-2x+3$ ، و A هي نقطة إحداثيّاتها $(1,-1)$.

عيِّن المماسات للخط البياني $\mathcal{C}$ التي تمرّ بالنقطة A في حال وجودها.

نحو الحلّ

- يفيدنا الرّسم في توقّع النتيجة.

1. ابدأ برسم الخطّ البياني $\mathcal{C}$ وضع النقط A .
2. أَتقع النقطة A على $\mathcal{C}$؟
3. برأيك، ما عدد المماسات المارّة بالنقطة A للخط البياني $\mathcal{C}$؟

- في الحقيقة، علينا إذن تعيين النقطة أو النقاط M من $\mathcal{C}$ التي يمرّ المماس عندها للمنحني $\mathcal{C}$ بالنقطة A . لتعيين نقطة M على $\mathcal{C}$ تكفي معرفة فاصلتها m .

1. اكتب بدلالة m معادلة المماس T_m عند النقطة M للمنحني $\mathcal{C}$.
2. أثبت أنّ « T_m يمرّ بالنقطة A » يُكافئ « $m^2 - 2m - 4 = 0$ ».
3. حلَّ هذه المعادلة. كم مُماساً T_m تجد؟
4. أنجز العمل، بتوضيع النقاط M التي وجدتها على $\mathcal{C}$، ورسم المماسات.

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 المماسات المشتركة لخطّين بيانيين

نتأمّل في مَعلَم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، الخطّان البيانيّان $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ للتابعين

$f : x \mapsto x^2$ و $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

عين المماسات المشتركة لهذين الخطَّين البيانيَّيْن في حال وجودها.

نحو الحلّ

- علينا أوّلاً فهم معنى القول: مُماسٌ مشتركٌ لخَطَّين بيانيَّين. إنّه مستقيم يمس في آن معاً الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ في A، والخطّ البياني $\mathcal{C}_g$ في B. وبوجه عام تكون النقطتان A و B مختلفتين.

1. ابدأ برسم الخطَّيْن البيانيَّيْن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ في المَعْلَم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. حاول إنشاء مماسٍّ مشترك، أترى مماساً واحداً أم أكثر؟

- نعرف كيف نكتب معادلة مماس لخطّ بياني في نقطة معروفة فاصلتها، منه تأتينا فكرة اتباع الخطوات الآتية

  - نكتب معادلة مُماس Δ_a للمنحني $\mathcal{C}_f$ في نقطة فاصلتها كيفيّة a.
  - نكتب معادلة مُماس Δ_b للمنحني $\mathcal{C}_g$ في نقطة فاصلتها كيفيّة b، $(b \neq 0)$.
  - نبحث إذا كان بالإمكان تعيين a و b كي ينطبق المماسان Δ_a و Δ_b.

1. اكتب معادلة مُماس Δ_a للمنحني $\mathcal{C}_f$ في نقطة فاصلتها كيفيّة a.
2. اكتب معادلة مُماس Δ_b للمنحني $\mathcal{C}_g$ في نقطة فاصلتها كيفيّة b، $(b \neq 0)$.
3. استنتج أن انطباق المماسين Δ_a و Δ_b يُكافئ وجود عددين a و b يُحقّقان الشرطين $2a = -1 / b^2$ و $-a^2 = 2 / b$. ثُم استنتج قيم a و b.

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14 المماسات المتعامدة لقطع مُكافئ

نتأمّل، في مَعلَم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي مُعادلته $y = x^2$. عين مجموعة النقاط M التي يمكن أن نُنشئ منها مماسين متعامدين للقطع $\mathcal{P}$.

نحو الحلّ

لنرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط التي نبحث عنها. يُترجم انتماء النقطة M إلى $\mathcal{E}$ بأنّه يمكن أن ننشئ من M مماسين متعامدين للقطع $\mathcal{P}$. لنفترض أنّ M_0 هي نقطة من $\mathcal{E}$ إحداثيّاتها (x_0, y_0)، ولنستنتج انطلاقاً من هذا الشروط على x_0 و y_0. استناداً إلى الفرْض يمرّ مماسان T و T' للقطع $\mathcal{P}$ بالنقطة M_0. لنرمز بالرمزين P و P' إلى نقطتي التماس، ولنرمز بالرمزين a و c إلى فاصلتيهما.

1. أثبت أنّ $y = 2ax - a^2$ هي معادلة للمماس T.
2. أثبت أنّ انتماء M_0 إلى T يُترجم بالعلاقة : $a^2 - 2x_0a + y_0 = 0 \quad (1)$.

وبأسلوب مُماثل، نجد وضوحاً، أنّ $y = 2cx - c^2$ هي مُعادلة للمماس T'، وأنّ انتماء M_0 إلى T' يُترجم بالعلاقة : $c^2 - 2x_0c + y_0 = 0 \quad (2)$.

بقي أن نُترجم خاصة تعامد المماسين T و T'. نعلم أنّه إذا كان d و d' مستقيمين معادلتيهما $y = mx + p$ و $y' = m'x + p'$ بالترتيب، يُكافئ تعامدُ المستقيمين d و d' الشرطَ $m \cdot m' = -1$ وهي خاصّة سنعود إليها لاحقاً.

1. أثبت أنّ $4ac = -1 \quad (3)$.
2. استنتج من العلاقات (1) و (2) و (3) أنّ $y_0 = -\frac{1}{4}$، ومن ثَمّ أنّ M_0 تنتمي إلى مستقيم ثابت Δ معادلته $y = -\frac{1}{4}$.

أثبتنا أنّه إذا كانت M نقطة من $\mathcal{E}$ انتمت M إلى المستقيم Δ، وبقي أن نجيب عن السؤال الآتي: إذا كانت M نقطة من المستقيم Δ فهل نستطيع أن ننشئ منها مماسين متعامدين للقطع $\mathcal{P}$؟

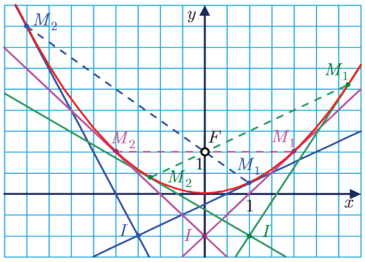
برهن أنّ الإجابة عن هذا السؤال هي نعم، ثم أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

15 محلٌّ هندسي.

نتأمّل، في مَعلَم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، الخطّ البياني $\mathcal{C}$ الذي مُعادلته $y = \frac{1}{4}x^2$. والنقطة F التي إحداثيّاتها $(0,1)$. يقطع مستقيم d مارٌّ بالنقطة F وميله m الخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطتين M_1 و M_2. ويتقاطع المماسان في M_1 و M_2 للمنحني $\mathcal{C}$ بالنقطة I.

عين المحلّ الهندسي $\mathcal{E}$ الذي ترسمه النقاط I عندما يتحوّل المستقيم d حول F.

نحو الحلّ



بعد رسم الخطّ البياني $\mathcal{C}$ وعدد من المستقيمات d نتيقّن أنّ d يقطع دوماً الخطّ البياني $\mathcal{C}$ في نقطتين. كما يبدو أنّ النقاط I تقع على استقامة واحدة أي إنها تقع دوماً على المستقيم نفسه. تتبع إحداثيّات النقطة I فاصلتي النقطتين M_1 و M_2 اللتين نرمز إليهما بالرمزين x_1 و x_2. ولتعيين x_1 و x_2، علينا أوّلاً تعيين معادلة المستقيم d.

1. تيقّن أنّ $y = mx + 1$ هي معادلة d.
2. أثبت أنّ x_1 و x_2 في حال وجودهما هما جذرا المعادلة $x^2 - 4mx - 4 = 0$. أثبت أنّ لهذه المعادلة دوماً جذران مختلفان.

بقي أن نحسب، بدلالة x_1 و x_2 إحداثيي النقطة I، ولتحقيق ذلك علينا البحث عن نقطة تقاطع المماسين في M_1 و M_2 للخطّ البياني $\mathcal{C}$، في حال تقاطعهما.

1. اكتب، بدلالة x_1 معادلة للمماس في M_1 للخطّ البياني $\mathcal{C}$، وكذلك اكتب بدلالة x_2 معادلة للمماس في M_2 للخطّ البياني $\mathcal{C}$.
2. لماذا يتقاطع هذان المماسان؟
3. استنتج أنّ إحداثيّات النقطة I هي $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_1 x_2}{4}\right)$.
4. احسب إحداثيّات النقطة I بدلالة m وبيّن أنّ I هي نقطة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = -1$.

أثبتنا أنّه إذا كانت I نقطة من $\mathcal{E}$ انتمت I إلى المستقيم Δ، وبقي أن نجيب عن السؤال التالي: إذا كانت I نقطة من المستقيم Δ فهل هي نقطة من $\mathcal{E}$؟

برهن أنّ الإجابة عن هذا السؤال هي نعم، ثم أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

16 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

1. أثبت أنّ الخطّ البياني C_f للتابع f يقبل مماسات عند كل نقطة من نقاطه.
2. حلَّ المعادلة $f'(x) = 0$ ، عبِّر عن النتيجة هندسيّاً.
3. عيّن فواصل نقاط المنحني C_f التي يساوي ميل المماس عندها 3.

17 أيمكن أن يكون المستقيم الذي معادلته $y = 7x + 9$ مماساً للمنحني الذي معادلته $y = x^3 + 4x + 11$؟ إذا كان جوابك : «نعم» عيِّن نقطة التماس.

18 عيِّن المماسات التي تمرّ بالنقطة $A(1,2)$ للخطّ البياني للتابع : $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^2 + 3x - 1$.

19 ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = x + 2$، ولتكن A النقطة من d التي فاصلتها 0. نرغب بتعيين جميع القطوع المُكافئة $\mathcal{P}$ التي معادلاتها $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$ والتي تمسّ المستقيم d في A.

1. أثبت أنّ لكلِّ واحد من هذه القطوع المكافئة معادلةً من الشكل $y = ax^2 + x + 2$، مع $a \neq 0$.
2. a. لتكن (x_0, y_0) إحداثيّات رأس القطع المُكافئ $\mathcal{P}$. أوجد علاقة تربط x_0 و y_0 ولا تحوي a.
   b. أثبت أنّ رؤوس القطوع المُكافئة $\mathcal{P}$ تقع على خط مستقيم ثابت، يطلب تعيين معادلته.

20 عيّن الأعداد الحقيقيّة a و b ليمر بالنقطة $A(2,0)$ الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = ax + b - \frac{6}{x}$، ويقبل مُماساً في A المستقيم الذي معادلته $y - x + 2 = 0$.

21 عيِّن m كي يقبل المنحني الذي معادلته $y = (m-1)x^2 + (3m+2)x + 4$ مماساً ميله 6 في النقطة التي فاصلتها -1.

22 أوجد تابع كثير الحدود من الدّرجة الثّالثة، يمرّ خطّه البياني بالنقطتين $A(0,0)$ و $B(1,1)$، ويقبل عند هاتين النقطتين مماسات توازي محور الفواصل.

23 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة، ثُمّ عيِّن إشارة $f'(x)$ تبعاً لقيم x.

① $f(x) = x + 1 - \frac{2x}{x+3}$ ② $f(x) = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2$ ③ $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

④ $f(x) = x + \frac{2}{x} - 1$ ⑤ $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$ ⑥ $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$

⑦ $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ ⑧ $f(x) = \frac{2x^2 - x}{(x+1)^2}$

24 احسب فيما يأتي المشتقّات f'، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة،

① $f(x) = x^2 + 1 - \frac{2x}{x+1}$ ② $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{3-x}$

③ $f(x) = x\sqrt{x}$ ④ $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ⑥ $f(x) = \frac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$

25 في مَعْلَم متجانس، $\mathcal{P}$ هو القطع المُكافئ الذي معادلته $y=x^2$، و d هو المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}$، و F النقطة التي إحداثيّاتها $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

1. اكتب معادلة للمماس T للقطع $\mathcal{P}$ في النقطة M التي فاصلتها t.
2. ليكن H المسقط القائم للنقطة M على d. أثبت أنّ T هو محور القطعة المستقيمة $[HF]$.

26 ليكن f التابع كثير الحدود: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a\neq 0)$، وليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع f في مَعْلَم متجانس. ولتكن A و B نقطتين من $\mathcal{C}$ فاصلتاهما s و t حيث $s\neq t$.

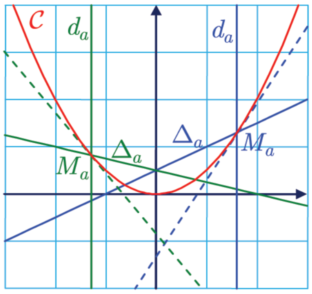
① a. أثبت أنّ معادلة المماس في A للمنحني $\mathcal{C}$ هي $y=(2as+b)x-as^2+c$.

b. اكتب بأسلوب مماثل معادلة المماس في B للمنحني $\mathcal{C}$.

② أثبت أنّ المماسان السابقان يتقاطعان في نقطة فاصلتها $\frac{t+s}{2}$.

③ a. أثبت أنّ $f(t)-f(s)=\left(t-s\right)f'\left(\frac{t+s}{2}\right)$.

b. استنتج أنّ المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $\frac{t+s}{2}$ يوازي (AB).

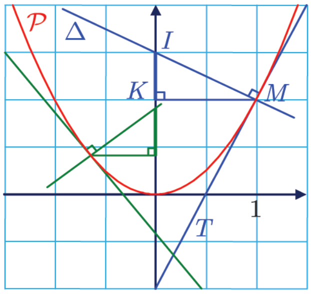


27 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=x^2$. ليكن a عدداً حقيقيّاً و d_a المستقيم الذي معادلته $x=a$. يقطع المستقيم d_a القطع $\mathcal{P}$ في M_a، فنرسم Δ_a نظير المستقيم d_a بالنسبة إلى المماس في M_a للقطع $\mathcal{P}$. أثبت أنّ جميع المستقيمات Δ_a تمرّ بنقطة ثابتة F. (نسمّيها المحرق).

28 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=x^2$، و F هي النقطة التي إحداثيّاتها $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. لتكن M نقطة من محور الفواصل، فاصلتها غير معدومة، وليكن d مستقيماً مارّاً بالنقطة M. أثبت أنّ الخاصّتين الآتيتين متكافئتان:

① المستقيم d يمس القطع $\mathcal{P}$ في نقطة فاصلتها غير معدومة

② المستقيم d عموديّ على المستقيم (FM).



29 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=x^2$. لتكن M نقطة من $\mathcal{P}$ فاصلتها غير معدومة، وليكن T المماس للقطع $\mathcal{P}$ في M، و Δ المستقيم المار بالنقطة M عموديّاً على T. نعرّف النقطة I نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور التراتيب، والنقطة K المسقط القائم للنقطة M على المحور نفسه.

أثبت أنّ الطول IK يبقى ثابتاً عندما تتحوّل النقطة M على $\mathcal{P}$.

3

تطبيقات الاشتقاق

1. المشتقّ والاطّراد والقيم الحدّية محليّاً
2. حلّ المعادلة $f(x)=0$

نتعامل في حياتنا اليوميّة مع أشياء متغيّرة ونريد احياناً إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لها لتكون بشكلها الأمثل تأمل الأسئلة الآتية:

ما أقل تكلفة ممكنة لإنجاز مشروع معيّن؟ ما أكبر فائدة ممكنة لإنتاج آلة معيّنة؟

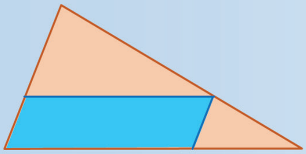
ما أكبر سعة ممكنة لخزان ماء يمكن صنعه من صفيحة معدنيّة معلومة الأبعاد.

ما أبعاد نافذة مستطيلة الشكل تسمح بإدخال أكبر كميّة من الإضاءة إذا علم محيطها

كيف تحدد الأبعاد وبدقّة لتحصل على:

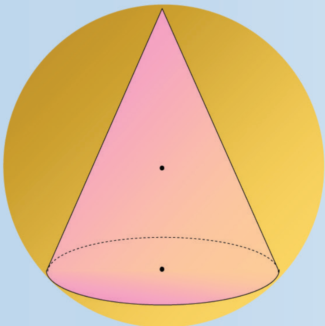
- واجهة عتبة ضعيفة الميل تجعل تسلّق عربات نقل البضائع لها سهلاً.

- أقصر سلم يمكن أن تصل حافته العليا لواجهة المنزل ومرتكزة حافته السفلى على الأرض خارج الحائط.



مسألة إقليدس

- رسم شكل هندسي داخل شكل آخر ونحتاج معرفة أبعاد هذا الشكل، مثلاً لحساب أكبر مساحة لمتوازي أضلاع ضمن مثلّث معلوم.



- وضع مجسّم داخل مجسّم آخر ونحتاج معرفة أبعاد هذا المجسّم،مثلاً لحساب أكبر حجم لمخروط داخل كرة نصف قطرها معلوم). هذه المسائل وغيرها الكثير تطبيقات حياتيّة مباشرة لمفهوم القيم الحديّة لتابع.

تطبيقات الاشتقاق

انطلاقة نشطة

تهدف هذه الانطلاقة إلى استكشاف الصلة بين اطّراد تابعٍ اشتقاقيّ ما وإشارة تابعه المشتقّ.

1 . مهمّة مستحيلة

① حاول أن ترسم خطّاً بيانياً لتابع متزايد تماماً $\mathcal{C}$ على أن يكون له على الأقلّ مماساً ميله سالب.

② برأيك، أَيوجد تابع f متزايدٌ تماماً واشتقاقيٌّ على مجالٍ I ويحقّق $f'(a) < 0$ عند نقطةٍ a من I؟

③ حاول أن ترسم خطّاً بيانيّاً لتابع متناقصاً تماماً $\mathcal{C}$ على يكون له على الأقلّ مماساً ميله موجب.

④ برأيك، أَيوجد تابع f متناقصٌ تماماً واشتقاقيٌّ على مجالٍ ويحقّق $f'(a) > 0$ عند نقطةٍ a منه؟

2 . التوابع المطّردة والتوابع الاشتقاقيّة على مجال

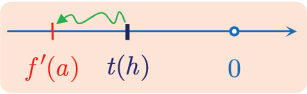
ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً ومتزايداً على مجالٍ I، ولتكن a نقطة من هذا المجال مختلفة عن طرفيه.

① ليكن h عدداً حقيقياً على أن ينتمي العدد $a + h$ إلى المجال I. قارن بين $f(a)$ و $f(a+h)$ في الحالتين $h > 0$ و $h < 0$.

② ليكن $t(h)$ معدّل تغيّر التابع f بين النقطتين a و $a+h$ (نسبة تغيّر التابع $f(a+h) - f(a)$ إلى تغيّر المتحوّل h).

❶ استنتج أنّ $t(h)$ موجبٌ أو معدوم. ولمّا كان f تابعاً اشتقاقيّاً على المجال I كان $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} t(h)$. لنبرهن أنّ $f'(a) \geq 0$.

❷ لمّا كان $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} t(h)$ استنتجنا أنّ معدّل التغيّر $t(h)$ يكون قريباً من $f'(a)$ عندما يكون h قريباً من الصفر، فإذا افترضنا أنّ $f'(a) < 0$ وجدنا قيمة h قريبة من الصفر يكون عندها $t(h) < 0$، وهذا يناقض نتيجة ❶ إذن $f'(a)$ عددٌ موجبٌ أو معدوم.



③ أعطِ إشارة التابع المشتق f' على المجال I.

④ لنتأمّل الآن، تابعاً اشتقاقيّاً ومتناقصاً تماماً على I. عيّن، بالمثل، إشارة التابع المشتق f' على I.

خلاصة 1

لكلّ تابعٍ اشتقاقي ومطّرد (متزايد أو متناقص) على مجالٍ I تابعٌ مشتقٌ إشارته ثابتة على هذا المجال.

3. مسألة العكس

من الناحية العمليّة، نريد أن نحدّد على أيٍّ من المجالات يكون تابعٌ ما متزايداً أو متناقصاً. بقولٍ آخر، إذا كان f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I وكانت إشارة تابعه المشتق f' ثابتة على هذا المجال، فهل يكون f تابعاً مطّرداً على هذا المجال ؟

① تأمّل التوابع الآتية.

① $f : x \mapsto 2x + 1$ ② $f : x \mapsto -x + 2$ ③ $f : x \mapsto x^2$

④ $f : x \mapsto -x^2$ ⑤ $f : x \mapsto x^3$

❶ اذكر جهة اطّراد كلٍّ منها وبيّن جدول الاطراد الموافق.

❷ عيّن المشتق f' لكلّ من التوابع f السابقة وادرس إشارة $f'(x)$.

❸ تيقّن، في كلٍّ حالة من الحالات السابقة، أنّ f يكون متزايداً عندما يكون مشتقّه f' موجباً ويكون متناقصاً عندما يكون مشتقّه f' سالباً.

② ليكن التابع $f : x \mapsto x^2 - 4x + 4$

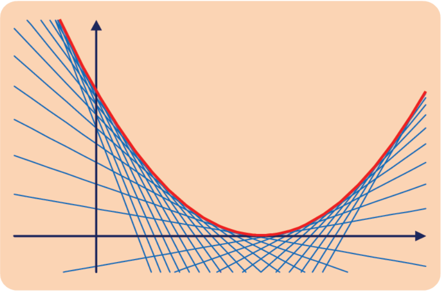
❶ بيّن أنّ f اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ وعيّن $f'(x)$.

❷ بيّن أنّ إشارة f' سالبة على المجال $]-\infty, 2[$ وموجبة خارجه.

❸ بيّن أنّ معادلة المماس لمنحني التابع f عند نقطة $(a, f(a))$ تكتب بالشكل

$$y = (2a - 4)x - a^2 + 4$$

❹ رسمنا في الشكل المبيّن أدناه مجموعة المستقيمات المماسة لمنحني التابع f عند النقاط الموافقة للقيم $-1, -0.8, -0.6, -0.4, \ldots, 0, 0.2, 0.4, \ldots, 4$.



لاحظ حزمة المماسات: كيف تبدو العلاقة بين إشارة f' واطّراد التابع f على المجال $[-1, 4]$ ؟

خاصّة 2

يتبيّن لنا من الأمثلة السابقة أنّه في حالة تابع f اشتقاقيٍّ على مجالٍ I يتحقّق ما يأتي.

- إذا كان $f' > 0$ على I كان f متزايداً تماماً على I .
- إذا كان $f' < 0$ على I كان f متناقصاً تماماً على I .

3

1 المشتق والاطّراد والقيم الحدّية

1.1. اطّراد تابع

تبيّن المبرهنة الآتية، التي نقبلها بدون برهان، العلاقة بين اطّراد تابعٍ اشتقاقيّ وإشارة مشتقّه.

مُبرهَنة 1

ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I، تابعه المشتقّ f'.

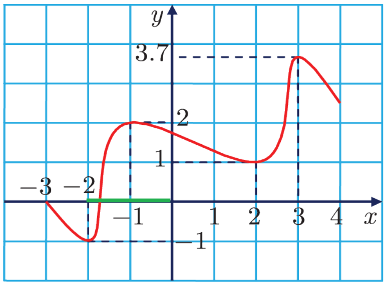
- إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I.
- إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I.
- إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I.

مثال التابع $f : x \mapsto x^3$ اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ ومشتقّه $f' : x \mapsto 3x^2$. نلاحظ أنّ f' تابعٌ موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ باستثناء $x = 0$ حيث ينعدم. وعليه، يكون التابع f متزايداً تماماً على $\mathbb{R}$.

2.1. القيم الحدية

عرّفنا في كتاب الصّف الأولّ الثّانوي أكبر قيم التابع f على مجالٍ I. « تكون القيمة $f(a)$ قيمة كبرى للتابع f على مجالٍ I يضمّ النقطة a إذا كان $f(x) \leq f(a)$ أيّاً كانت النقطة x من المجال I.»

فعلى سبيل المثال، أكبر قيم التابع f الممثّل على المجال $I = [-3, 4]$ في الشكل المجاور هي 3.7 ويبلغها عند النقطة $x = 3$ (لأنّ $f(3) = 3.7$).



ولكن على المجال $I' =]-2, 0[$ لدينا $f(x) \leq 2$ و $f(-1) = 2$.
أيْ إنّ أكبر قيم التابعِ f على المجال I' هي 2. نقول إذن إنّ القيمة 2 هي **قيمةٌ كبرى محليّاً** للتابع f يبلغها عند $x = -1$.

تعريف

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ولتكن c نقطة من I. نقول إنّ القيمة $M = f(c)$ **قيمة كبرى محليّاً** للتابع f عند النقطة c إذا وُجِدَ مجالٌ مفتوحٌ I' يضمّ النقطة c ويحقّق الشرط

$$\forall x \in I' \cap I, \quad f(x) \leq f(c)$$

ونعرّف بأسلوب مماثل، القيمة الصغرى محلياً لتابعٍ f، إذ نقول إنّ القيمة $m = f(d)$ **قيمة صغرى محليّاً** للتابع f عند النقطة d من I، إذا وُجِدَ مجالٌ مفتوحٌ I' يضمّ النقطة d ويحقق الشرط

$$\forall x \in I' \cap I, \quad f(d) \leq f(x)$$

ففي المثال السابق، نرى أنّ $f(-2) = -1$ هي قيمة صغرى للتابع f على المجال $[-3,4]$ وأنّ $f(2) = 1$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f.

نقول إنّ القيمة $f(a)$ **قيمةٌ حدّية محليّاً** إذا كانت قيمة كبرى محليّاً أو قيمة صغرى محليّاً.

3.1. الحدّ الراجح والحدّ القاصر

ليكن f تابعاً ولتكن D مجموعة جزئيّة من مجموعة تعريفه. نسمّي **حدّاً راجحاً** على التابع f في المجموعة D كلّ عدد M يحقّق الشرط

أيّاً كان x من المجموعة D كان $f(x) \leq M$

وبالأسلوب نفسه نسمّي **حدّاً قاصراً** عن التابع f في المجموعة D كلّ عدد m يحقّق الشرط

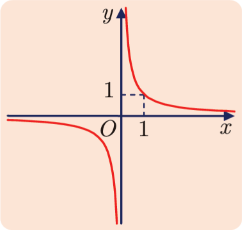
أيّاً كان x من المجموعة D كان $m \leq f(x)$

القيمة **الكبرى** للتابع f على المجموعة D (إن وُجِدت) هي حدٌّ راجح عليه في D، وتكون في هذه الحالة أصغر الحدود الراجحة لهذا التابع على المجموعة D.

وكذلك الأمر، تكون القيمة **الصغرى** للتابع f على المجموعة D (إن وُجِدت) حدّاً قاصراً عنه وتكون في هذه الحالة أكبر الحدود القاصرة لهذا التابع على المجموعة D.

تكريساً للفهم

أكان الافتراض « I مجالٌ» في المبرهنة 1 ضروريّاً ؟



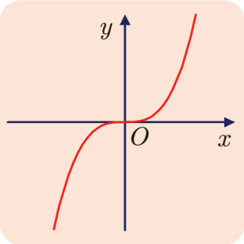
لنتأمّل التابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ المعرّف والاشتقاقيّ على المجموعة

$$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

فنرى أنّ التابع المشتق $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ سالبٌ تماماً على D. ولكنّ التابع f ليس متناقصاً تماماً على D لأنّ $f(-1) < f(1)$. نلاحظ هنا أنّ f متناقصٌ تماماً على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ كلٌّ على حِدَته.

ما الصلة بين مشتق التابع وقيمه الحدية محليّاً ؟

في الحقيقة، ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I ولتكن c نقطة منه مختلفة عن طرفيه، إذا كانت $f(c)$ قيمة حدية محليّاً لهذا التابع كان * $f'(c) = 0$. أي يكون للخطّ البياني للتابع f في هذه الحالة مماسٌ أفقيٌّ عند النقطة $(c, f(c))$.



بالمقابل، يمكن أن يكون $f'(d) = 0$ دون أن تكون القيمة $f(d)$ قيمةً حديّة محليّاً للتابع f. فمثلاً، التابع $f(x) = x^3$ يحقّق $f'(0) = 0$ دون أن تكون القيمة $f(0) = 0$ قيمةً حديّة محليّاً.

كيف يجري البحث عن القيم الحدية لتابع اشتقاقي ؟

مثال

ادرس اطّراد التابع f الآتي $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ ثُمّ بيّن إذا كانت له قيمٌ حديّة محليّاً.

لدراسة اطّراد التابع f وللبحث عن قيمه الحديّة المحليّة نُنَظِّم جدول اطّراد التابع f بدلالة إشارة مشتقّه.

الحل

التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان

$$f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$$

إذن ينعدم f' عند $x = -3$ و $x = 1$.

* هذه مبرهنة سنقبلها دون إثبات.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتقّ f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

واستناداً إلى المبرهنة 1 يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty,-3[$ و $f'(-3) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]-\infty,-3]$.
- $f'(x) < 0$ على المجال $]-3,1[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $[-3,1]$.
- $f'(x) > 0$ على المجال $]1,+\infty[$ و $f'(1) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطّراد

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السّابق أنّ القيمة $f(-3) = 22$ هي قيمة كبرى محليّاً للتابع f يبلغها عند النقطة -3 وأنّ القيمة $f(1) = -10$ هي قيمة صغرى محليّاً يبلغها عند النقطة 1.

تَدرَّبْ

❶ عيّن القيم الحدّية محليّاً للتوابع الآتية على المجال المعطى.

① $I = [0,+\infty[, \quad f(x) = x^2(x-1)$

② $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$

③ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4$

④ $I = [0,3], \quad f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 1}$

❷ ادرس اطّراد التابع f المعرّف على المجال I في كلٍّ من الحالات الآتية.

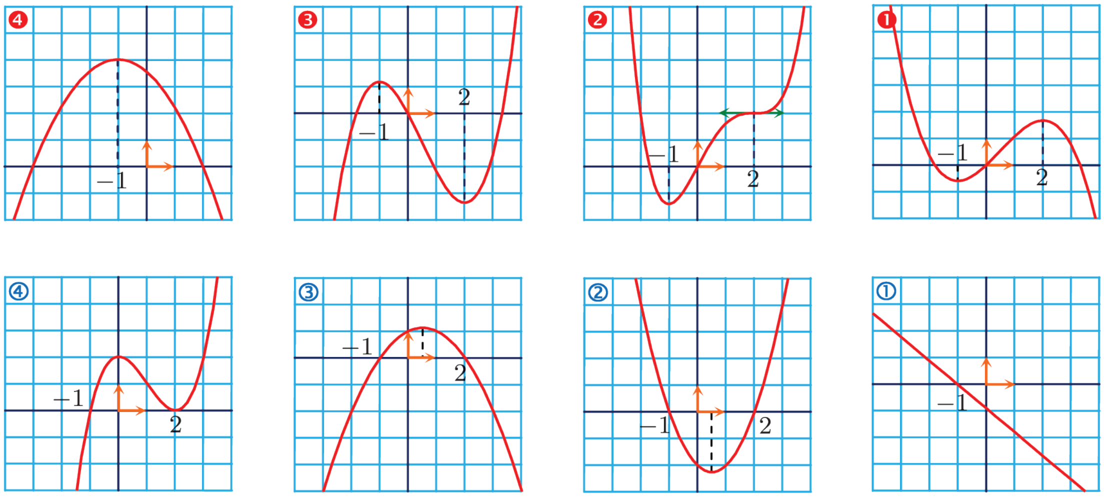
① $I = [-1,+\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x+1}$

② $I = [0,+\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{x}$

③ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 - 3x^2$

④ $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

❸ تمثّل الخطوط البيانيّة (❹,❸,❷,❶) أربعة توابع وتمثّل الخطوط البيانيّة (④,③,②,①) مشتقّات هذه التوابع ولكن بترتيب مختلف. اقرن الخطّ البياني لكلِّ تابع بالخطّ البياني لمشتقّه.

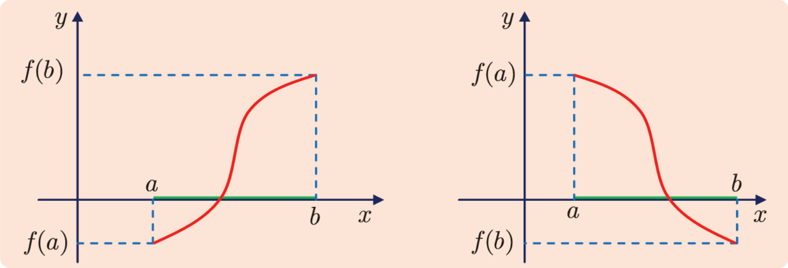


حل المعادلة $f(x)=0$

في حالة تابع معطى f، لا نستطيع عموماً، حلَّ معادلات من النمط $f(x)=0$ مجهولها x.
وهذه هي مثلاً حالة المعادلة $\cos x = x$.
لذلك نتوجّه إلى إيجاد قيم تقريبيّة لهذه الحلول عن طريق حصر هذه الحلول في مجالات يحوي كلٌّ منها حلّاً (وحلاً واحداً فقط). توضّح المبرهنة الآتية هذا الوضع، ونقبل بها دون برهان.

مُبرهَنة 2

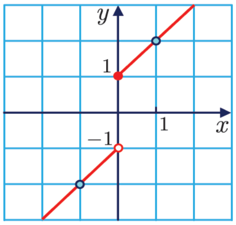
ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً ومطّرداً تماماً على مجالٍ $[a,b]$. إذا كان للقيمتين $f(a)$ و $f(b)$ إشارتين متعاكستين كان للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً في المجال $]a,b[$.



تكريساً للفهم

ما أهميّة فرضيات المبرهنة 2؟

يعطي اختلاف إشارتي $f(a)$ و $f(b)$ انطباعاً بوجود حلٍّ للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$. ولكنّ هذا غير صحيح عموماً.



فعلى سبيل المثال، ليكن f تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x+1$ في حالة $x\geq 0$ و $f(x)=x-1$ في حالة $x<0$.

فنرى أنّ للعددين $f(-1)$ و $f(1)$ إشارتين متعاكستين، ولكن لا توجد، وضوحاً، قيمة x من $\mathbb{R}$ يأخذ التابع f عندها القيمة 0.

تتضمن الفرضيّة « f اشتقاقي على المجال $[a,b]$» عدم انقطاع الخطّ البياني للتابع وبذا يقطع هذا الخطّ محور الفواصل في نقطةٍ واقعةٍ بين a و b. وهذا يثبت وجود حل للمعادلة $f(x)=0$.

وتنتج وحدانيّة الحلّ من فرضيّة الاطّراد التام للتابع f على المجال $[a,b]$. في الواقع، إذا كانت α و β نقطتين مختلفتين من المجال $[a,b]$، فإمّا أن يكون $f(\alpha)<f(\beta)$ أو $f(\alpha)>f(\beta)$ وفي الحالتين يكون $f(\alpha)\neq f(\beta)$. وبذلك لا يمكن أن يأخذ التابع f قيمتين متساويتين عند نقطتين مختلفتين من المجال $[a,b]$ أي إنّه لا يمكن أن يكون للمعادلة $f(x)=0$ أكثر من حل.

مثال استعمال المبرهنة 2 في إيجاد حلّ تقريبي للمعادلة $f(x)=0$.

❶ برهن أنّ للمعادلة $x^3-3x+1=0$ حلّاً وحيداً في المجال $[-1,1]$.

❷ ليكن x_0 هذا الحل. عيّن مجالاً طوله 10^{-1} يضمّ x_0.

كي نثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً في المجال $[a,b]$ عندما يكون التابع f اشتقاقيّاً على $[a,b]$ يمكننا أن نثبت ما يأتي:

- للتابع f' إشارة ثابتة على $[a,b]$ باستثناء عدد منته من النقاط على الأكثر.
- للعددين $f(a)$ و $f(b)$ إشارتان مختلفتان.

الحل

❶ للمعادلة المقترحة الصيغة $f(x)=0$ وقد عرّفنا $f(x)=x^3-3x+1$. التابع f هو تابع كثير الحدود، فهو اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$، ومشتقّه هو $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. لندرس إذن إشارة ثلاثي الحدود ولنلخص هذه الدّراسة في جدول كما يأتي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

إذن، التابع f متناقص تماماً في المجال $[-1,+1]$، والعددان $f(-1)$ و $f(1)$ متعاكسان بالإشارة، واعتماداً على المبرهنة 2 ، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً x_0 في المجال $[-1,+1]$.

❷ لنبحث، الآن عن تحديدٍ للحلّ x_0 بمجالٍ طوله 10^{-1}.

- نحسب $f(0)=1$ ولأنّ $f(1)<0$ استنتجنا أنّ $x_0 \in]0,1[$.
- نحسب مجدداً $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$ ولأنّ $f(0)=1$ استنتجنا أنّ $x_0 \in]0,\frac{1}{2}[$.
- ثمّ نحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}>0$ ولأنّ $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ استنتجنا أنّ $x_0 \in]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$.
- وبالمثل نحسب $f\left(\frac{5}{12}\right)<0$ ولأنّ $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}>0$ استنتجنا أنّ $x_0 \in]\frac{1}{3},\frac{5}{12}[$.

وطول هذا المجال الأخير يساوي $\frac{1}{12}$ فهو إذن أصغر من $\frac{1}{10}$. وتتحقّق المتراجحة

$$\frac{1}{3}<x_0<\frac{5}{12}$$

بالطبع ليس هذا المجال وحيداً، إذ يمكننا بحساب $f(0.3)$ و $f(0.4)$ أن نستنتج أيضاً أنّ

$$0.3<x_0<0.4$$

تَدرَّبْ

❶ ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $[2,3]$.

❷ ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّاً وحيداً في المجال $[0,1]$، وحلّاً وحيداً في المجال $[7,8]$.

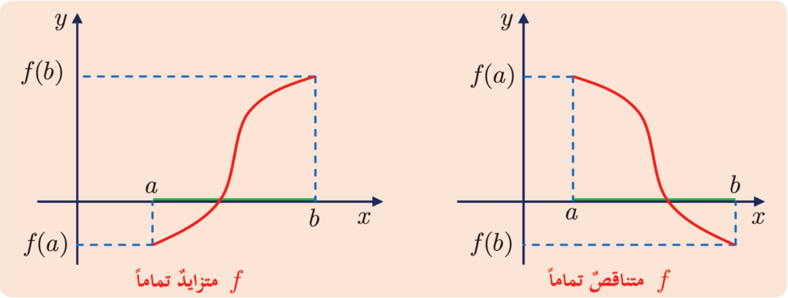
أفكار يجب تَمثُّلُها

- تُفيد إشارة المشتقّ في تعيين جهة اطّراد التابع f.
  - إذا كان $f'>0$ على مجالٍ I كان f متزايداً تماماً على هذا المجال. (يبقى ذلك صحيحاً أيضاً إذا انعدم f' عند عدد منته من نقاط هذا المجال).
  - إذا كان $f'<0$ على مجالٍ I كان f متناقصاً تماماً على هذا المجال.
  - إذا كان $f'=0$ على مجالٍ I كان f يكون ثابتاً على هذا المجال.
  - لا يمكن أن نستبدل، في المبرهنة 2، بالمجال I «اجتماع مجالات».

- عمليّاً، تتعيّن القيم الحدّية محلياً من جدول الاطّراد. فمثلاً، في الجدول الآتي تُمثّل القيم $f(x_0)$ و $f(x_1)$ قيماً حدّية محلّياً للتابع f.

x	$-\infty$		x_0		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

- عند إثبات وجود ووحدانيّة الحلّ للمعادلة $f(x) = 0$ في مجالٍ $[a, b]$ تذكّر المخطّطين الآتيين



نلاحظ هنا أنّ وحدانيّة الحلّ تنجم عن الاطّراد التام (التزايد التام أو التناقص التام) للتابع f وأنّ وجود الحلّ يعود إلى تقاطع الخطّ البياني للتابع مع محور الفواصل (وهذا مؤكّد عندما يكون التابع f اشتقاقيّاً).

منعكسات يجب امتلاكُها

- لدراسة اطّراد التابع f تذكّر أنّ إشارة المشتق f' هي الأساس في ذلك. وهنا، ننوّه إلى أنّ تعيين إشارة جداء، بوجهٍ عام، أسهل من تعيين إشارة مجموع. ومن ثمّ لا ينصح بنشر عبارة التابع المشتق $f'(x)$ مباشرة.

مثال

إذا كان $f'(x) = x^2(x+1)$ فإنّه من الأفضل عدم نشر العبارة وذلك لأنّ إشارة المشتق في هذه الحالة هي إشارة المقدار $x+1$.

- في الحالة الخاصّة الموافقة للصيغ

$$f'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$$

تكون إشارة المشتق f' من إشارة البسط (إذ إنّ $(v(x))^2$ موجبٌ على الدوام).

- لا تنسَ أنّ عبارة المشتق $f'(x)$ قد تكون معقّدة، ومع هذا يكون تعيين إشارته سهلاً.

3

مثال

التابع $f : x \mapsto 3x^4 + x + \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقّه $f'(x) = 12x^3 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
ولمّا كانت جميع حدود المجموع موجبة تماماً، كان $f'(x)$ كذلك.

- لمعرفة إذا كان لمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً في مجالٍ $[a,b]$، فكّر، في حال كون f اشتقاقيّاً، أنْ تتحقق من ثبات إشارة المشتق f' ومن كون إشارتا $f(a)$ و $f(b)$ متعاكستين.

مثال

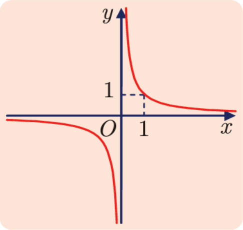
المعادلة $f : x \mapsto x^3 + x - 5 = 0$ تقبل حلّاً وحيداً في المجال $[1,2]$ لأنّ $f'(x) = 3x^2 + 1$ وهو موجبٌ تماماً أيّاً كانت قيمة x وإشارتا المقدارين $f(1) = -3$ ، $f(2) = 5$ متعاكستان.

أخطاء يجب تجنّبها

- عندما لا تكون مجموعة التعريف D مجالاً، لا تَقُلْ إنّ «إشارة f' ثابتة على D فهو مطّرد تماماً على D». هذا غير صحيح بوجهٍ عام.

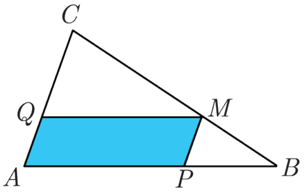
مثال

التابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ مشتقّه f' سالب تماماً على مجموعة تعريفه $D = \mathbb{R}^*$ ولكّنه غير متناقص على D .



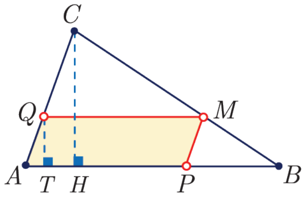
أنشطة محلولة

نشاط 1 المساحة الأمثلية



طرح إقليدس المسألة الآتية ثُمّ حلّها حلّاً هندسيّاً: ليكن المثلّث CAB، ولتكن M نقطةً ما من الضلع $[BC]$، ننشئ من M متوازي الأضلاع $MQAP$. كيف نختار النقطة M حتّى تكون مساحة متوازي الأضلاع أكبر ما يمكن؟

الحل



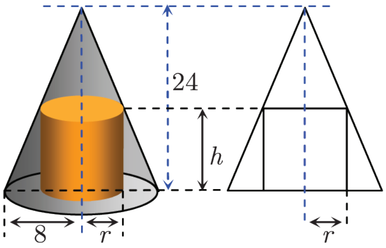
نعلم أنّ S مساحة متوازي الأضلاع $MQAP$ تساوي $AP \times QT$، لنضع $AP = t$ و $QT = x$. لإيجاد صيغة للمساحة S بدلالة متحول واحد نبحث عن علاقة بين t و x.

1. بالاستفادة من مبرهنة تالس، برهن أنّ $\frac{CH - x}{CH} = \frac{t}{AB}$. ضع $AB = c$ ، $CH = h$. تبسيطاً للكتابة.

2. استنتج $S = \frac{c}{h}(hx - x^2)$، ثُمّ عيّن القيمة الكبرى للتابع S.

نشاط 2 الحجم الأصغري والحجم الأعظمي

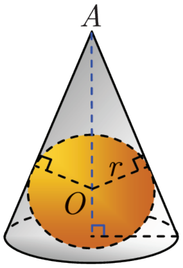
❶ الأُسطوانة الأعظميّة في مخروط



نتأمّل مخروطاً دورانيّاً ارتفاعه $24\,\text{cm}$ ونصف قطر قاعدته $8\,\text{cm}$. نريد أن نوضّع أسطوانة دورانيّة داخله يكون حجمها أكبر ما يمكن. ما هي أبعاد الأسطوانة الأعظميّة هذه، أي كم يبلغ ارتفاعها وما هو نصف قطر قاعدتها؟

للإجابة عن هذا السّؤال نرمز بالرّمزين r و h إلى نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها بالترتيب. وللتعبير عن حجم الاسطوانة V بدلالة متحوّل واحد نبحث عن علاقة بين r و h.

1. برهن أنّ $h = 3(8 - r)$ ومن ثمّ عبّر عن الحجم V بدلالة r.
2. ادرس اطّراد التابع V وأجِبْ عن السؤال المطروح.



② كرة في المخروط الأصغري

لتكن S كرةً مركزها O ونصف قطرها r. نرغب في وضعها داخل مخروط دوراني حجمه v أصغر ما يمكن. ما هي أبعاد المخروط ؟

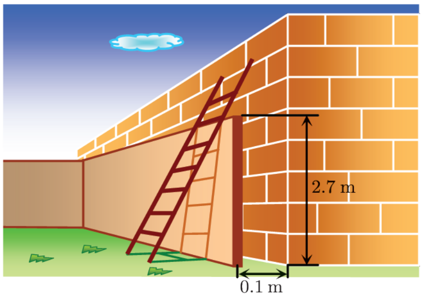
1. للإجابة عن السؤال، نضع $AO = x$. بيّن أنّ:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(x+r)^2}{x-r} \qquad : \; x \in \left]r, +\infty\right[$$

تذكّر أنّ حجم المخروط الدوراني نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h هو $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

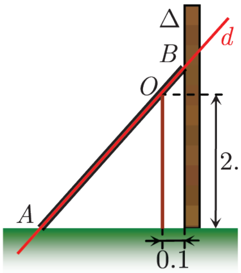
2. برهن أنّ المخروط الدوراني الأصغر حجماً يوافق $x = 3r$. ما ارتفاع المخروط في هذه الحالة ؟ وما نصف قطر قاعدته ؟

نشاط 3 أقصر سُلَّم



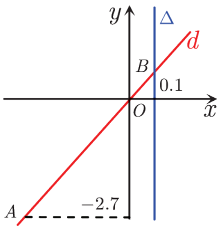
يبلغ ارتفاع سياج، موازٍ لجدار يقع خلفه، 2.7 متراً وتفصله عن الجدار مسافة 0.1m. كم يبلغ طول أقصر سُلَّم يمكن أن يستند إلى الجدار ويمرّ فوق السياج؟

① الصياغة الرياضياتيّة



لنضع نموذجاً رياضياتياً للمسألة. نلاحظ من الشّكل أنّ على السلّم أن يكون ملامساً طرف السياج (إذا أردنا أن يكون أقصر ما يمكن) في نقطة ولتكن O، ومن ثمّ تؤول المسألة إلى البحث عن أقصر طول للسلّم AB والمارّ بالنقطة O. يمكن تحديد وضع السلّم بمعرفة النقطة B وهذا يقودنا إلى طريقةٍ تحليليّة لحلّ المسألة.

② الحلّ التحليلي



نختار مَعْلَماً متجانساً تكون فيه معادلة المستقيم d أبسط ما يمكن، أي أنْ نختار مبدؤه النقطة O وبذلك يتحدد موضع المستقيم من ميله وليكن m.

نلاحظ هنا أنّ هذا الخيار يقتضي أن يكون $m > 0$.

1. اكتب معادلتي المستقيمين d و Δ، واستنتج إحداثيّات النقطتين A و B بدلالة الميل m.

2. عبّر عن الطول AB بدلالة m. ضع $AB = f(m)$.

③ البحث عن القيمة الصغرى للتابع f

نبحث الآن عن أصغر قيمة للتابع f، ونستفيد من الخاصّة الآتية.

خاصة

ليكن f تابعاً موجباً على مجالٍ I. إذا كانت $f^2(a)$ أصغر قيمة للتابع f^2 على I، كانت $f(a)$ أصغر قيمة للتابع f على I.

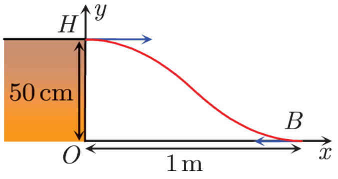
1. بيّن أنّ مشتقّ التابع $f^2 : m \mapsto AB^2$ يكتب بالشكل:

$$\left(f^2\right)'(m) = \frac{0.2(0.1m + 2.7)}{m^3}(m^3 - 27)$$

2. عيِّن إشارة هذا المشتق على المجال $]0,+\infty[$، واستنتج جدول اطّراد التابع f^2. ثُمّ استنتج، باستعمال الخاصّة السابقة، القيمة الصغرى للتابع f أي الطول الأصغري للسلّم.

3. برهن صحّة الخاصّة السابقة. يمكنك العودة إلى تعريف القيمة الصغرى لتابع على مجال. كيف تستثمر الافتراض «f موجبٌ على I» ؟

نشاط 4 واجهة عتبة ضعيفة الميل



نهدف في هذا العمل إلى تصميم واجهة عتبة ضعيفة الميل تجعل تسلّق عربات نقل البضائع العتبة سهلاً. يبيّن الشكل مقطعاً جانبياً لهذه الواجهة. يبلغ ارتفاع العتبة $OH = 50\,\text{cm}$ وتبلغ المسافة الأفقيّة المخصّصة للواجهة $OB = 1\,\text{m}$.

نفترض أن تحقق الواجهة الشرطين:

① أن تكون مماسة للأرض عند النقطة B.

② أن تكون مماسة لسطح العتبة عند النقطة H.

يهدف هذا النشاط إلى إيجاد توابع يكون لخطوطها البيانيّة شكل الواجهة المُراد تصميمها وأن تحقّق الشرطين ① و ②. في مَعْلَم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ طول شعاع واحدته $1\,\text{m}$ يكون للنقطتين B و H الإحداثيّات $(1,0)$ و $(0,\frac{1}{2})$ بالترتيب.

❶ لماذا لا يصلح الخطّ البياني لقطع مكافئ لهذا التصميم؟

❷ لنبحث الآن عن خطٍّ بياني مكوّن من قوسين لقَطْعين مكافئين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ يتّصلان عند النقطة $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. أي يتقاطع الخطّان عند هذه النقطة ويكون لهما عندها مماس مشترك. اكتب معادلتي $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$.

❷نختار التابع $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ المعرّف على $[0,\frac{1}{2}]$ بالعلاقة $h(x)=-x^2+\frac{1}{2}$ وعلى المجال $]\frac{1}{2},1]$ بالعلاقة $h(x)=(x-1)^2$.

❶ ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني الممثل للتابع h. أَيُحقق $\mathcal{C}$ الشرطين ① و ②؟

❷ارسم $\mathcal{C}$ في المَعْلَم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وارسم مماسه عند النقطة $x=\frac{1}{2}$.

❸بيّن أنّه أيّاً كانت النقطة x من المجال $[0,1]$ كان $|h'(x)|\leq 1$.

نريد الآن تحسين شكل الواجهة بأن نختار الخطّ البياني Γ لتابعٍ g معرّف على المجال $[0,1]$ من الشكل $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

❶ عيّن الأمثال a,b,c,d حتّى يحقّق الخطّ البياني Γ الشرطين ① و ②.

❷ ❶ ادرس اطّراد التابع g.

❷ برهن أنّه أيّاً كانت النقطة x من المجال $[0,1]$ كان $|g'(x)|\leq\frac{3}{4}$. يمكنك البحث عن القيمة الصغرى للمشتق g' على المجال $[0,1]$.

❸ أنشئ المنحني Γ والمنحني $\mathcal{C}$ في المَعلم نفسه. ماذا تلاحظ؟

تمرينات ومسائل

1 ادرس جهة اطّراد التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $f(x) = x^2 - 4x + 1$

② $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$

③ $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$

④ $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

⑤ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

⑥ $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$

⑦ $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$

⑧ $f(x) = 2x^4 - 27x + 7$

2 عيِّن مجموعة تعريف كلٍّ من التوابع f الآتية ثمّ ادرس اطّراد كل منها.

① $f(x) = \frac{2x-3}{2x+4}$

② $f(x) = \frac{-4}{x-3}$

③ $f(x) = \frac{-3x}{1+x^2}$

④ $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x-3}$

⑤ $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x-1}$

⑥ $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 6}$

⑦ $f(x) = \frac{2x^2 + 12x}{x^2 + 4}$

⑧ $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$

3 ادرس جهة اطّراد التابع f المعرّف على المجال I في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $f(x) = \sqrt{3x+4}$, $I = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

② $f(x) = 4\sqrt{-3x+5}$, $I = \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$

③ $f(x) = x\sqrt{x+3}$, $I = \left[-3, +\infty\right[$

④ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$, $I = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

4 1. تيقّن أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$4x^3 - 28x - 24 = (x+1)\left(4x^2 - 4x - 24\right)$$

2. ادرس جهة اطّراد التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة الآتية.

$$f(x) = x^4 - 14x^2 - 24x + 10$$

3. أوجد القيم الحدّية محليّاً للتابع f في حال وجودها.

5 ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً في المجال $[0,1]$.

لنتعلّم البحث معاً

6 مقارنة توابع.

التابعان f و g معرّفان على $\mathbb{R}$ بالعلاقتين $f(x) = x^4 - 3x + 1$ و $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$.
قارن بين التابعين f و g.

نحو الحل

- تعني مقارنة تابعين f و g تعيين الأعداد الحقيقيّة x التي تُحقّق $f(x) \le g(x)$، وتلك التي تُحقّق $f(x) \ge g(x)$. عموماً، يمر الطريق الأسهل لمقارنة تابعين بدراسة إشارة الفرق أي $d(x) = f(x) - g(x)$، وهذا بدوره يؤول على حلّ المتراجحة $d(x) > 0$.
اكتب بأبسط صيغة عبارة $d(x) = f(x) - g(x)$.
- ليس سهلاً تعيين إشارة $d(x)$. وهذا يجعلنا نفكّر باشتقاق التابع $x \mapsto d(x)$ ودراسة اطراده أملاً بالتمكّن من مقارنته مع الصفر.
  1. تيقّن أنّ d يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، واحسب $d'(x)$.
  2. ادرس إشارة d'، واكتب جدول اطراد d.
  3. يبيِّن الجدول قيمة صغرى موجبة تماماً للتابع d.

  علِّل إذن لماذا يكون $d(x) > 0$ وذلك أيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

7 إثبات صحّة متراجحة.

أثبت أنّه مهما يكن العددان الحقيقيّان الموجبان تماماً a و b يكن $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \ge 2\sqrt{2}$.

نحو الحل

- لمّا كانت الأعداد موجبة، نفكّر باختزال الطّرَف الأيسر من المتراجحة، وذلك بمُحاولة «حذف الجذور» عن طريقِ مُقارنة مربّعي الطرفين.
أنجز الحساب المُشار إليه، لماذا تثير النتيجة خيبة الأمل؟
- تبدو المسألة صعبة، إذا ليس هناك الكثير من الفرضيّات، فقط $a > 0$ و $b > 0$. ولكن عندما نهدف إلى إثبات صحّة متراجحة تربط أعداداً من المجال نفسه، يكون من المناسب اصطناع تابع وإثباتُ أنّ المتراجحة المطلوبة هي نتيجة من خواصّ هذا التابع. ولكن أيُّ تابع نصطنع ولدينا متحولان a و b؟ عموماً، نتجاوز هذه الصّعوبة بالطّريقة الآتية: نثبّت واحداً من العددين وليكن a، ونترك الآخر يتحوّل، وهذا ما يقودنا إلى اصطناع التابع $f : x \mapsto \sqrt{a+x}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1. علّل اشتقاقيّة التابع f على المجال $]0,+\infty[$، واحسب $f'(x)$.
2. تيقّن أنّ المتراجحة $f'(x) \geq 0$ تُكافئ

$$\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq \frac{\sqrt{a+x}}{2x\sqrt{x}}$$

أو

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{a}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

وأخيراً $x\sqrt{x} \geq a\sqrt{a}$.

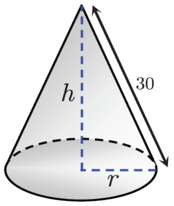
3. توثّق أنّ التابع $x \mapsto x\sqrt{x}$ متزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$، واستنتج أنّ المتراجحة $x\sqrt{x} > a\sqrt{a}$ تُكافئ $x > a$ والمساواة $x\sqrt{x} = a\sqrt{a}$ تُكافئ $x = a$.
4. استنتج أنّ التابع f يبلغ قيمته الصغرى عند $x = a$ وأنّ هذه القيمة هي $2\sqrt{2}$.
5. إذن، أيّاً كانت $x > 0$ كان $f(x) \geq 2\sqrt{2}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

8 الحجم الأمثل.

نذكّر أنّ طول مولّد مخروط دوراني يساوي بُعد رأسه عن أيّة نقطة من دائرة قاعدته. عيّن المخروط الدوراني الذي طول مولّده يساوي $30\,\text{cm}$ وحجمه أكبر ما يمكن.

نحو الحلّ



- في مسائل من هذا النوع، يفيد الرسم الأوّلي في توضيح الوضع وتوجيه الحساب. يتعيّن المخروط الدوراني بوسيطين: ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r.
- نعلم أنّ حجم هذا المخروط يساوي $V = \frac{\pi}{3}r^2h$. لحساب القيمة الكبرى للحجم V ندرس اطّراد V بالاستفادة من الاشتقاق. ولكنّ V يتبع متحوّلين h و r، علينا إذن التعبير عن V بدلالة متحوّل واحد، ومنه فكرةُ البحث عن علاقة تربط h و r.

1. أثبت صحّة العلاقة $(*)$ الآتية $r^2 + h^2 = 900$.
2. تيقّن أنّه إذا استفدنا من العلاقة $(*)$ للتعبير عن h بدلالة r، حَوَتْ عبارة V على جذر تربيعي. أمّا إذا استفدنا من العلاقة $(*)$ للتعبير عن r بدلالة h، أخذت عبارة V هيئة كثير حدود بالمتحوِّل h يسهل اشتقاقه.
3. أثبت أنّ عبارة V بدلالة h هي $V(h) = \frac{\pi}{3}\left(900h - h^3\right)$ و h تنتمي إلى المجال $]0,30[$.
4. احسب $V'(h)$ وحلَّ المتراجحة $V'(h) > 0$، ثُمّ استنتج جهة اطّراد V، وقيمته الكبرى.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

9 أقرب نقطة.

نتأمّل في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=1-x^2$، والنقطة A التي إحداثيّتاها $(0,-2)$.

عيّن النقاط M من القطع $\mathcal{P}$ الأقرب إلى A.

نحو الحلّ

☝ يجب بداية توضيح قولنا « نقاط $\mathcal{P}$ الأقرب إلى A ». هذا يعني أننّا نبحث عن النقاط M من $\mathcal{P}$ التي تبلغ عندها المسافة AM قيمتها الصغرى. ولمّا كان المَعْلَم متجانساً كان حساب المسافة المشار إليها سهلاً انطلاقاً من إحداثيّات النقاط A و M. ولمّا كانت M تقع على القطع $\mathcal{P}$ تعيَّنت إحداثيّاتها بسهولة انطلاقاً من فاصلتها x.

1. ما ترتيب النقطة M بدلالة x؟
2. تيقّن أنّ $AM=\sqrt{x^4-5x^2+9}$

✌ نجحنا بحساب AM بدلالة x. إذن علينا إيجاد القيمة الصغرى للتابع AM بدراسة جهة اطّراده بالاشتقاق. لنضع f التابع الذي يقرن بالعدد x الطول AM أي $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+9}$. لم ندرس بعدُ اشتقاق تابع من النمط $x\mapsto\sqrt{p(x)}$ و $p(x)$ كثير حدود درجته أكبر تماماً من 1، في حين نعرف كيف نشتقّ التابع $x\mapsto p(x)$. ولكنّ AM طولٌ، فهو أصغري في الوقت نفسه الذي يكون فيه مربّعه AM^2 أصغريّاً.

لنعرّف إذن $p(x)=x^4-5x^2+9$ ولنلاحظ أنّ $p(x)\geq 0$ أيّاً كانت قيمة x.

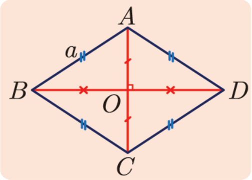
1. عيّن القيمة الصغرى للتابع p على $\mathbb{R}$، وأوجد الأعداد الحقيقيّة التي يبلغ p هذه القيمة عندها.
2. لنفترض أنّ p يبلغ قيمته الصغرى $p(a)$ عند a من $\mathbb{R}$. أثبت أنّ
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{p(x)}\geq\sqrt{p(a)}$$
3. استنتج القيمة الصغرى للتابع f على $\mathbb{R}$، وأوجد الأعداد الحقيقيّة التي يبلغ f هذه القيمة عندها.
4. ما عدد النقاط التي تجيب عن السّؤال المطروح ؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

10 أكبر مساحة.

أثبت أنّ المربّع الذي محيطه P، هو أكبر المعيّنات التي محيطها P مساحةً.

نحو الحلّ



ليس لدينا الكثير من الفرضيّات. نعلم فقط أنّنا نبحث عن معيّن محيطه يساوي P . لنرسم إذن شكلاً نستخلص منه بعض النتائج.

إنّ لجميع هذه المعيّنات طول الضلع نفسه وهو $a=\frac{P}{4}$. لنرمز بالرمز S إلى مساحة المعين $ABCD$. نعلم أنّ $S=\frac{AC\times BD}{2}$ ، فمن الطبيعي إذن أن نضع $x=AC$ و $y=BD$. لإيجاد أكبر قيمة للمساحة S ندرس اطّرادها. وتأتي فكرة إيجاد علاقة تربط x و y من كون S يتبع لمتحوّلين. تأمّل الشكل، واستفد من كون المثلّث OAB قائماً في O لتجد علاقة تربط بين x و y.

أثبت أنّ $x^2+y^2=4a^2$ ، ثُمّ استنتج عبارة S بدلالة x و a.

نجحنا بالتعبير عن S بدلالة x . ونفكّر بدراسة جهة اطّراد التابع $x\mapsto S(x)$ ، ولكن للأسف لم ندرس بعدُ كيف نشتق مثل هذا التابع. ولكن $S>0$ فهو إذن أعظمي في الوقت نفسه الذي يكون فيه مربّعه S^2 أعظميّاً.

1. تيقّن أنّ المسألة تؤول إلى دراسة التابع $f:x\mapsto\frac{x^2}{4}\left(4a^2-x^2\right)$ على المجال $]0,\,2\,a[$.
2. ادرس هذا التابع واستنتج قيمته الكبرى، وقيمة، أو قيم، x التي يبلغ عندها قيمته الكبرى.
3. استنتج القيمة الكبرى للتابع S ، مُعلّلاً إجابتك.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

11 اطراد تابع مثلثي.

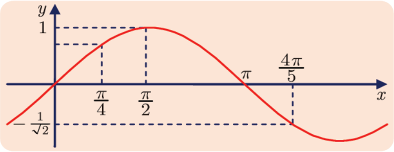
ليكن f التابع المعرّف على $[0,\pi]$ بالعلاقة $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. ادرس اطّراد التابع f .

نحو الحلّ

لدراسة اطّراد تابع قابل للاشتقاق، نحسب مشتقّه، ثُمّ نعيِّن المجالات التي يكون للمشتق عليها إشارة ثابتة. علّل كون التابع f قابلاً للاشتقاق على المجال $[0,\pi]$. وتحقّق أنّه مهما تكن x يكن

$$f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن علينا دراسة إشارة $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ وهي عكس إشارة $f'(x)$. والسؤال الذي يطرح نفسه هو كيف نعيِّن بوجه عام إشارة تابع جيبيّ؟ نستفيد من منحني التابع $\sin$:



ونطرح السؤال: في أيِّ مجال يتحوّل $X = x + \frac{\pi}{4}$ عندما يتحوّل x في المجال $\left[0, \pi\right]$؟

1. تيقّن أنّ X يتحوّل في المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.
2. استنتج حلول كلٍّ من $\sin X > 0$ و $\sin X = 0$ و $\sin X < 0$.
3. استنتج حلول كلٍّ من $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ و $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ و $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$
4. بيّن اطّراد التابع f.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

12 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$.

1. ادرس اطّراد التابع f.
2. استنتج اطّراد التابع $g : x \mapsto \left|f(x)\right|$.

13 نتأمّل تابعاً f يُحقّق الخواصّ الآتية.

- مجموعة تعريف f هي $D = [-2, -1[\cup]-1, +\infty[$.
- f يقبل الاشتقاق على D.
- f' ينعدم في D فقط عند -2 وعند 0.
- $f'(x) > 0$ على $]0, +\infty[$ و $f'(x) < 0$ على $]-2, -1[\cup]-1, 0[$.

1. a. ادرس اطّراد التابع f.
   b. قارن في حالة $-1 < a < b < 0$ بين $f(a)$ و $f(b)$.
   c. بافتراض أنّ $-1 < a < b < 2$. أيمكنك المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$؟
   d. بافتراض أنّ $a = -2$ و $b = 0$. أيمكنك المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$؟
2. نعلم إضافة إلى ما سبق أنّ f يُكتب بالشكل $x \mapsto \dfrac{x^2 + mx + n}{x + p}$ و m و n و p أعداد حقيقيّة و $p \neq 0$. عيّن تابعاً f يُحقّق الشروط المذكورة.

14 ليكن b عدداً حقيقياً. والتابع f هو التابع الكسري المعطى بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x^2 + bx + 1}{x^2 + x + 1}$. عيّن مجموعة تعريف f، ثُمّ ادرس اطّراد التابع f تبعاً لقيم b.

15 ليكن m عدداً حقيقياً. والتابع f هو التابع الكسري المعطى بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 2}{x - m}$. عيّن مجموعة تعريف f، ثُمّ ادرس اطّراد التابع f تبعاً لقيم m.

16 في الحالات الآتية، ادرس اطّراد التابع f على المجال المعطى.

① $I=[0,\pi]$، $f(x)=\cos(2x)$

② $I=]\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}[$، $f(x)=\dfrac{1}{1+2\cos x}$

③ $I=[0,2\pi]$، $f(x)=\dfrac{x}{2}+\cos x$

④ $I=[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$، $f(x)=\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

⑤ $I=[0,\pi]$، $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos(2x)$

17 في الحالات الآتية، ادرس اطّراد التابع f على المجال المعطى، ثُمّ أوجد عددين m و M يُحقّقان $m\le f(x)\le M$ أيّاً كان x من I على أن يكون المجال $[m,M]$ أصغر ما يمكن.

① $I=[-3,1]$، $f(x)=-x^3-2x^2+4x+3$

② $I=[0,6]$، $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

③ $I=[1,4]$، $f(x)=\dfrac{9}{x}+x-1$

④ $I=[1,8]$، $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$

⑤ $I=[-4,0]$، $f(x)=\sqrt{1-2x}$

18 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=-x^3+2x^2+4$.

1. أثبت أنّه عندما ينتمي x إلى $[-1,\frac{4}{3}]$ ينتمي $f(x)$ إلى $[4,7]$.
2. هل عكس الخاصّة السّابقة صحيح؟

19 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=8x^4-8x^2+1$. أثبت أنّ $-1\le f(x)\le 1$ يُكافئ $-1\le x\le 1$.

20 أثبت أنّ للمعادلة $\dfrac{x^3}{1+x}=1$ حلّاً وحيداً في المجال $[1,2]$.

21 أثبت أنّ للمعادلة $\cos x=x$ حلّاً وحيداً في المجال $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

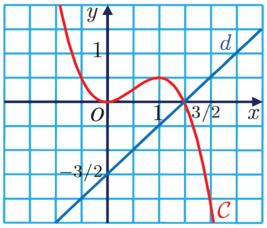
22 نتأمّل التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 24$.

1. ادرس اطّراد التابع f.
2. أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]-2,-1[$.
3. أثبت أنّ α هو الحلّ الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $f(x) = 0$.
4. استنتج جهة اطّراد التابع $g : x \mapsto \frac{3}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 24x - 10$.

23 متراجحة بِرنولي. ليكن n من $\mathbb{N}$. أثبت أنّه مهما يكن $x \geq 0$ يكن

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

24 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$، وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني. وأخيراً ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = x - \frac{3}{2}$.



1. احسب إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البياني $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
2. استنتج أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ والمستقيم d يشتركان بنقطة على الأقلّ.
3. ادرس الوضع النسبيّ للخطّ البياني $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

25 ليكن x عدداً حقيقيّاً موجباً أو معدوماً.

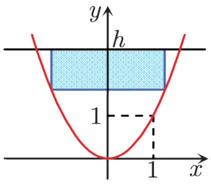
1. أثبت على التوالي، بدراسة اطّراد توابع مُختارة اختياراً جيّداً، المتراجحات الآتية.

① $\sin x \leq x$ ② $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$

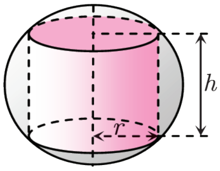
③ $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x$ ④ $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

2. احصر، في حالة $x \geq 0$، كلّاً من التابعين $\sin$ و $\cos$ بين كثيري حدود.
3. استنتج ممّا سبق تقديراً للعددين $\sin\frac{1}{2}$ و $\cos\frac{1}{2}$.

26 ليكن h عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. نسب المستوي إلى مَعْلَم متجانس. ونتأمّل جزء المستوي المحدَّد بالقطع الذي معادلته $y = x^2$ وبالمستقيم الذي معادلته $y = h$. نريد أن نُنشئ داخل ذلك الجزء، وكما هو مبيَّن في الشكل المجاور، مستطيلاً مساحته أكبر ما يمكن. احسب بعدي هذا المستطيل بدلالة h.



27 أسطوانة ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها r تمسّ داخلاً كرة نصف قطرها R، وبحيث تكون قاعدتا الأسطوانة دائرتين من سطح الكرة.

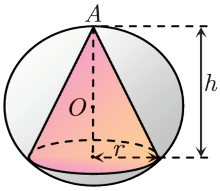


① عبِّر عن r بدلالة R و h.

② احسب حجم الأسطوانة بدلالة h.

③ ما قيمة h التي تجعل حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن؟

28 مخروط دوراني ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r يمسّ داخلاً كرة نصف قطرها R ومركزها O، وبحيث تكون قاعدته دائرة من سطح الكرة.



① أثبت أنّ r يساوي $\sqrt{h(2R-h)}$ ثم احسب حجم المخروط بدلالة h.

② ما قيمة h التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن؟

29 نتأمّل في مَعلم متجانس القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y = 1 - x^2$. $M(x_0, y_0)$ نقطة من القطع $\mathcal{P}$ تُحقِّق $x_0 > 0$ و $y_0 > 0$. يقطع المماس للقطع $\mathcal{P}$ المرسوم من M محور الفواصل في A ويقطع محور التراتيب في B. عيّن موضع M الذي يجعل مساحة المثلّث OAB أصغر ما يمكن.

4

المقاربات ودراسة التوابع

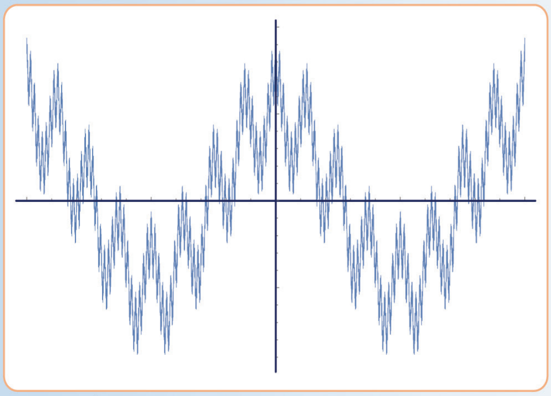
1. نهاية تابع عند اللّانهاية الموجبة
2. نهاية تابع عند اللّانهاية السّالبة
3. نهاية تابع عند نقطة
4. مبرهنات النهايات
5. دراسة التوابع كثيرات الحدود وبعض التوابع الكسريّة

كارل ڤايرشتراس Karl Weierstrass (1815-1897)

هو عالم رياضيات ألماني، بدأ حياته العمليّة مُدرّساً في مدرسة ثانوية ثُم حصل على وظيفة أستاذ في جامعة برلين عام 1846.

كارل ڤايرشتراس

هو أبو التحليل الرّياضيّ الحديث، ويرجع إليه الفضل في صياغة المفاهيم الرّياضياتيّة الحديثة، كمفاهيم النهاية والاستمرار والاشتقاق، صياغة دقيقة، وما يزال العديد من هذه المفاهيم يُدرّس حاليّاً باستعمال الرموز التي أدخلها. قادته أعماله العلميّة إلى إنشاء العديد من التوابع التي تتمتّع بخواصّ استثنائيّة، والتي كان وجودها مجهولاً قبله. فمثلاً أثبت ڤايرشتراس وجود تابع مستمرّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة دون أن يكون اشتقاقيّاً عند أية نقطة منها، وكانت هذه النتيجة عكس كلّ ما كان يعتقده الرياضياتيّون الذين عاصروه أو سبقوه من أمثال كوشي وغاوس وأويلر ولايبنتز وغيرهم.



تابع ڤايرشتراس دوريّ ومستمرّ ولا يقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة

4

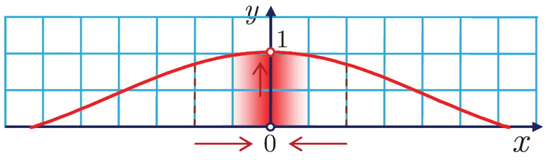
المقاربات ودراسة التوابع

انطلاقة نشطة

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ بالصيغة $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. في الجدول الآتي نجد بعض الأعداد القريبة من العدد 0 وقيم التابع f المقابلة لها.

x	$\pm 2^{0}$	$\pm 2^{-1}$	$\pm 2^{-2}$	$\pm 2^{-3}$	$\pm 2^{-4}$	$\pm 2^{-5}$	$\pm 2^{-6}$	$\cdots \to 0$
$f(x)$	0.84147	0.95885	0.98962	0.99740	0.99935	0.99948	0.99996	$\cdots \to 1$

نلاحظ من الجدول أنّه عندما تقترب قيمة x من العدد 0 تقترب قيمة $f(x)$ من العدد 1 وذلك مع كون التابع f غير معرف عند $x = 0$. ويوضّح ذلك الشكل الآتي.



في مثل هذه الحالة نقول إنّ التابع f يسعى إلى العدد 1 عند الصفر، ونكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

1 نهاية تابع عند اللّانهاية الموجبة

تعريف

نقول إنّ التابع f **معرّف في جوار اللّانهاية الموجبة** $+\infty$ ، إذا كانت مجموعة تعريفه تحوي مجالاً من الشكل $]a,+\infty[$ مع $a \in \mathbb{R}$.

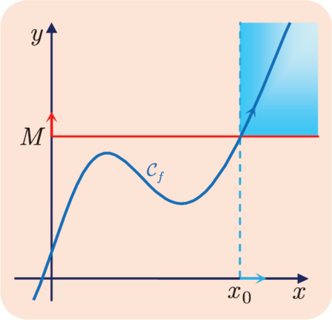
فيما يأتي سندرس سلوك تابع في جوار $+\infty$ ، وسنميز الحالات الآتية.

1.1. النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ ، والنهاية $-\infty$ عند $+\infty$.

تعريف

نقول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تتجاوز أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بما يكفي. ونكتب ذلك $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تتجاوز العدد M عندما تصبح x أكبر من حدٍّ معيّن x_0.



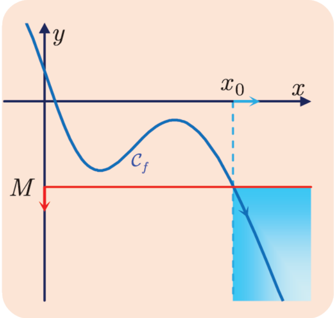
ونقبل أنّ نهاية التوابع الآتية هي $+\infty$ عند $+\infty$.

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

تعريف

نقول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح أصغر من أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بما يكفي. ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ففي الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تصبح أصغر من العدد M عندما تصبح x أكبر من حدٍ معيّن x_0.



ونقبل أنّ نهاية التوابع الآتية هي $-\infty$ عند $+\infty$.

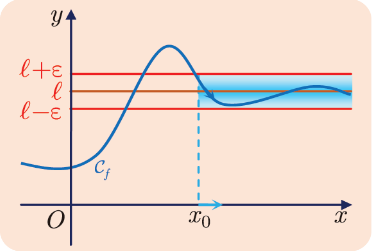
$$x \mapsto -x, \quad x \mapsto -x^2, \quad x \mapsto -x^3, \quad x \mapsto -\sqrt{x}$$

2.1. النهاية عدد حقيقي ℓ عند $+\infty$، المقارب الأفقي

تعريف

نقول إنّ نهاية f عند $+\infty$ هي ℓ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من القيمة ℓ، أو تتجمّع حول ℓ، عندما تصبح x كبيرة بما يكفي. ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

بصياغة أدق مهما اخترنا العدد $0 < \varepsilon$ فإن قيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ بدءاً من حدٍّ معين x_0، وذلك كما هو موضّح في الشكل المجاور.



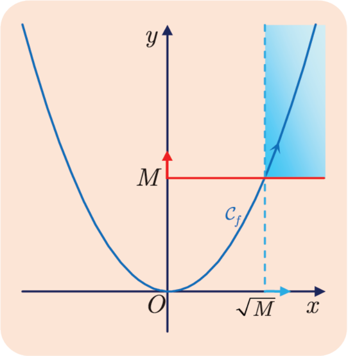
في هذه الحالة نقول إنّ المستقيم $y = \ell$ مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ للمنحني $\mathcal{C}_f$، لأنّ المنحني يقترب من هذا المستقيم عندما تزداد قيم x.

ونقبل أنّ نهاية التوابع الآتية هي $\ell = 0$ عند $+\infty$

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^3}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

تكريساً للفهم

كيف نوضّح معنى التعاريف السابقة؟



مثال حالة $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ كما يأتي $f(x) = x^2$. إذا كانت $x > 1$ كان $x^2 > x$. وهكذا عندما تأخذ x قيماً كبيرة فإن x^2 تصبح كبيرةً أيضاً. أياً كان العدد الموجب تماماً M ، فإنّ x^2 تتجاوز هذا العدد بمجرّد أن يصبح $x > \sqrt{M}$. ونكتب $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

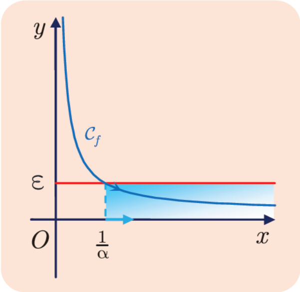
مثال حالة $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ليكن التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \mapsto$ المعرّف على $]0,\infty[$. يبيّن الجدول الآتي القيم التي يأخذها f عند بعض النقاط.

x	1	5	10	100	10^5	10^{20}	…
$\frac{1}{x}$	1	0.2	0.1	0.01	10^{-5}	10^{-20}	…

نلاحظ أنه عندما يأخذ المتحوّل x قيماً أكبر فأكبر تتجمّع قيم $\frac{1}{x}$ عند إلى الصفر.

فإذا كان $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً موجباً، وقعت جميع قيم $f(x)$ في المجال $]0,\varepsilon[$ بمجرّد أن كانت $x > \frac{1}{\varepsilon}$. ونكتب $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.



إنّ محور الفواصل **مقارب أفقيّ** لمنحني التابع f عند اللّانهاية الموجبة.

كيف نتنبّأ بنهاية تابع عند $+\infty$ ؟

مثال ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$. تحوي مجموعة تعريف f المجال $]1,+\infty[$، فهو معرّف في جوار اللّانهاية الموجبة. لنحاول التنبّؤ بنهايته عند $+\infty$ حدسيّاً عندما تكون x كبيرة يصبح العدد 1 مهملاً أمامها، ويمكننا من ثَمّ اعتبار البسط قريباً من $2x$، والمقام قريباً من x . أي يكون $f(x)\approx\dfrac{2x}{x}=2$ عندما تكون x كبيرة. أي نتوقّع أنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $\ell=2$. ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

مثال ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x^2-x$. لنحاول التنبّؤ بنهايته في $+\infty$ حدسيّاً عندما تكون x كبيرة تكون x^2 أكبر من x . كي نرى ذلك يكفي أن نقارن 100 و 100^2، ثمّ 1000 و 1000^2...، نقول إنّ x^2 هو الحد المسيطر في المقدار x^2-x . لنُخرِجَ هذا الحدّ عاملاً مشتركاً $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. رأينا فيما سبق أن $\dfrac{1}{x}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ من 1. أي إن سلوك $f(x)$ في $+\infty$ يماثل سلوك x^2.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

إنّ المناقشة في الأمثلة السابقة مبنيّة على الحدس ولا تعتبر برهاناً رياضيّاً، لكنها تفيد في التنبّؤ بالنهاية. وسنرى لاحقاً، كيف نحسب النهايات بأسلوب رياضيّاتي دقيق.

تَدرَّبْ

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$.

❶ $f(x)=x^3-x$

❷ $f(x)=x^4-1$

❸ $f(x)=\dfrac{x^3}{5}-2x+6$

❺ $f(x)=\dfrac{2}{x}-2x^2-100$

❺ $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+1$

❻ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$

❼ $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{3x^2+3x}$

❽ $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2+x}$

2 نهاية تابع عند اللّانهاية السّالبة

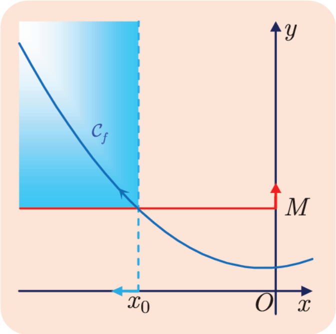
تعريف

نقول إنّ التابع f **معرّف في جوار اللّانهاية السّالبة** $-\infty$، إذا كانت مجموعة تعريفه تحوي مجالاً من الشكل $]-\infty, a[$ مع $a \in \mathbb{R}$.

فيما يأتي سندرس سلوك تابع في جوار $-\infty$، وسنميز الحالات الآتية.

1.2 النهاية $+\infty$ عند $-\infty$، والنهاية $-\infty$ عند $-\infty$

تعريف



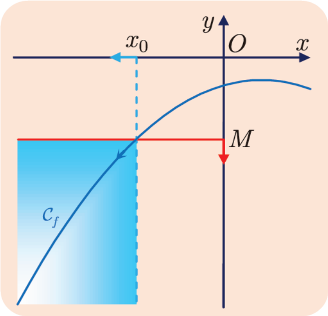
نقول إنّ نهاية f عند $-\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت القيم $f(x)$ تتجاوز أي عدد حقيقي M عندما يبتعد المتحوّل x نحو $-\infty$، أي عندما يصبح سالباً وتصبح قيمته المطلقة كبيرة. ونكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

ففي الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع f تتجاوز العدد M عندما تصبح x أصغر من حدٍّ معيّن x_0.

نقبل أنّ نهاية التوابع الآتية تساوي $+\infty$ عند $-\infty$

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^4$$

تعريف



نقول إن نهاية f عند $-\infty$ هي $-\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح أصغر من أي عدد حقيقي M عندما يبتعد المتحول x نحو $-\infty$، أي عندما يصبح سالباً وقيمته المطلقة كبيرة. ونكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع f تصبح أصغر من العدد M عندما تصبح x أصغر من حدٍ معيّن x_0.

نقبل أنّ نهاية التوابع الآتية تساوي $-\infty$ عند $-\infty$

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto x^5$$

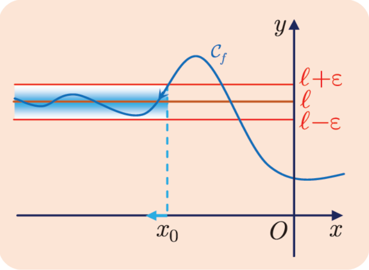
2.2. النهاية هي عدد حقيقي ℓ عند $-\infty$، المقارب الأفقي

تعريف

نقول أن نهاية f في $-\infty$ تساوي ℓ إذا كانت القيم $f(x)$ تقترب من العدد ℓ عندما يبتعد المتحوّل x نحو $-\infty$، أي عندما يصبح سالباً وتكون قيمته المطلقة كبيرة. نكتب ذلك بالصيغة $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

صياغة دقيقة:

أياً كان العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon>0$ فإنّ قيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ عندما تصبح x أصغر من حدٍ معين x_0.



نقول عندئذ إن المستقيم الذي معادلته $y=\ell$ هو مقاربٌ أفقي لمنحني التابع عند $-\infty$.

نقبل أنّ نهاية التوابع الآتية تساوي $\ell=0$ عند $-\infty$

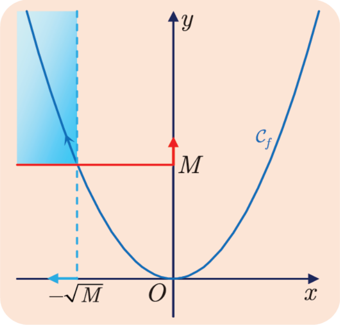
$$x\mapsto\frac{1}{x},\quad x\mapsto\frac{1}{x^2}$$

تكريساً للفهم

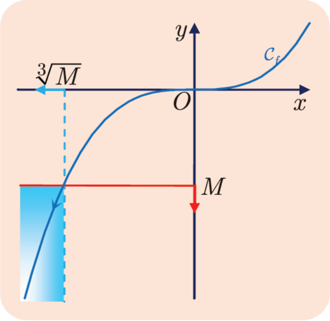
كيف نستوضح معنى التعاريف السابقة ؟

مثال لنتأمّل التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ كما يأتي $f(x)=x^2$.

عندما يبتعد المتحول x نحو اللّانهاية السّالبة، أي يصبح سالباً وقيمته المطلقة كبيرة، تصبح x^2 كبيرةً أيضاً. إذا كان M عدداً حقيقياً موجباً، ومهما كان M كبيراً، تجاوزت قيمة x^2 هذا العدد بمجرّد أن يصبح $x<-\sqrt{M}$. ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$.



مثال لنتأمّل التابع $x \mapsto f(x) = x^3$ المعرّف على $\mathbb{R}$. إذا كانت $x < -1$ كان $x^3 < x < -1$، وكان أيضاً $|x| < \left|x^3\right|$. وهكذا عندما يصبح x كبيراً بقيمته المطلقة تصبح الأعداد x^3 سالبة وكبيرةً بقيمتها المطلقة. نكتب في مثل هذه الحالة $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.



كيف نتنبّأ بنهاية تابع عند $-\infty$ ؟

مثال ليكن التابع f المعرّف بالعلاقة $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. إنّ مجموعة تعريفه هي $\mathbb{R}^*$ وتحوي المجال $]-\infty,-1[$، فهو معرّف في جوار اللّانهاية السّالبة. لنحاول توقع نهايته عند $-\infty$ حدسيّاً عندما يكون x سالباً وكبيراً بقيمته المطلقة فإنّ العدد $\dfrac{1}{x}$ يصبح مهملاً أمامه، لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ ، إذن يمكننا اعتبار $f(x) \approx x$ في جوار $-\infty$. أي إنّ نهاية التابع عند $-\infty$ هي $-\infty$. ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

إن المناقشة في الأمثلة السابقة مبنيّة على الحدس ولا تعتبر برهاناً رياضيّاً، لكنها تفيدنا في توقّع النهاية. وسنرى لاحقاً كيف نحسب النهايات بشكل رياضيّاتي دقيق.

تَدرَّبْ

عيّن نهايات التوابع الآتية عند $-\infty$.

❶ $f(x) = x^3 - 2x - 1$

❷ $f(x) = x^4 - \dfrac{5}{x}$

❸ $f(x) = -2x + 6x^5$

❺ $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

❺ $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$

❻ $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

❼ $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 - x}$

❽ $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 + x}$

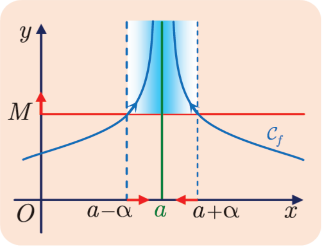
3 نهاية تابع عند نقطة

فيما يأتي سنرمز بالرمز D_f إلى مجموعة تعريف التابع f. كذلك سنفترض أن a عدد حقيقي يحقّق أحد الشرطين الآتيين:

- إمّا أن يكون a عنصراً من D_f.
- أو أن يكون a طرفاً لأحد المجالات المحتواة في D_f.

1.3. النهاية $+\infty$ عند a، أو $-\infty$ عند a. المقارب الشاقولي

تعريف

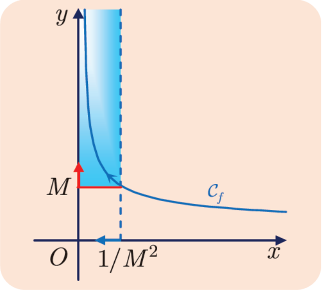


نقول إن نهاية f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M حين تقترب x بما يكفي من العدد a. ونكتب ذلك $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تتجاوز العدد M عندما يصبح بُعد x عن a أصغر من حد معين α، حيث α عدد حقيقي موجب تماماً.

نقول إن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو مقارب شاقولي لمنحني التابع.

مثال التابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ معرّف على المجال $D_f =]0,+\infty[$.



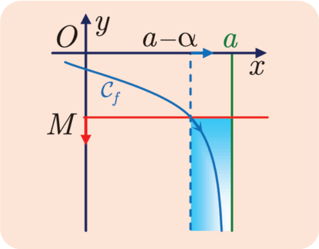
والنقطة $a = 0$ لا تنتمي إلى المجال D_f ولكنّها أحد طرفي هذا المجال، يمكننا إذن دراسة نهاية التابع عند النقطة $a = 0$. عندما تقترب الأعداد x من 0 فإن القيم $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ تصبح كبيرة أكثر فأكثر. إذا كان M عدداً حقيقياً موجباً تجاوزت قيمُ التابع العددَ M، مهما كان M كبيراً، عندما تصغر قيمة x بحيث يصبح $0 < x < \dfrac{1}{M^2}$.

نقول في هذه الحالة إن **نهاية التابع f** عند الصفر تساوي $+\infty$. ونكتب عندئذ

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ويكون محور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مقارباً شاقوليّاً لمنحني التابع.

تعريف



نقول إن نهاية f عند a هي $-\infty$ إذا صارت قيم $f(x)$ سالبة وأصغر من أي عدد حقيقي M مُعطى سابقاً عندما تكون x قريبة بما يكفي من العدد a. نكتب ذلك $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

في الشكل المجاور نرى أنّ قيم التابع تصبح أصغر من العدد M عندما يصبح بُعد x عن a أصغر من حدّ معين α، حيث α عدد حقيقي موجب تماماً.

نقول أن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو مقارب شاقولي لمنحني التابع.

2.3. النهاية عند a هي عدد حقيقي ℓ

تعريف

نقول إن نهاية f عند a هي ℓ إذا تجمّعت القيم $f(x)$ قرب القيمة ℓ عندما تصبح x قريبة بما يكفي من a. ونكتب ذلك $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

صياغة دقيقة:

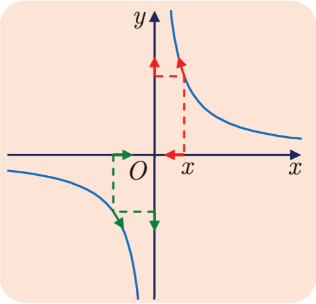
مهما كان $\varepsilon > 0$ فإن القيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ عندما يصبح المتحوّل x من D_f قريباً من a، أي عندما يصبح بعده عن a أصغر من حدّ معين α (يتعلّق بالعدد ε).

نقبل بالنتائج الآتية.

- إذا كانت $a \geq 0$، كان $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- إذا كان P كثير حدود، وكان a عدداً حقيقياً، كان $\lim\limits_{x\to a^+} P(x) = P(a)$.
- إذا كان F تابعاً كسريّاً معرّفاً عند a ، كان $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$.
- لدينا كذلك $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ و $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ أيّاً كان العدد الحقيقي a.

تكريساً للفهم

لماذا ليس للتابع $\frac{1}{x} \overset{f}{\longmapsto} x$ نهاية عند الصفر؟



مثال عندما تتحوّل x في $\left]-10^{-2},10^{-2}\right[$، **محذوفاً منه الصفر**، تأخذ الأعداد $f(x)$ قيماً كبيرة موجبة فإذا كان $x = 10^{-20}$ مثلاً كان $f(x) = 10^{20}$، وتأخذ أيضاً قيماً كبيرة سالبة فإذا كان $x = -10^{-15}$ مثلاً كان $f(x) = -10^{15}$. فإن قيم التابع $f(x)$ لا تتجمّع عند $+\infty$ كما إنّها لا تتجمّع عند $-\infty$. ولا تتجمّع عند أي عددٍ حقيقي معطى ℓ.

ولكن عندما يأخذ المتحول x قيماً **موجبة** قريبة من الصفر، تصبح الأعداد $\frac{1}{x}$ كبيرة موجبة، وتنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي M، مهما كان كبيراً، على وجه الدقّة لدينا

$$\text{لمّا كان} \quad \left(0 < x < \frac{1}{M}\right) \quad \text{كان} \quad \left(\frac{1}{x} > M\right)$$

نقول في هذه الحالة إن **نهاية التابع f من اليمين** عند الصفر هي $+\infty$. ونكتب عندئذ

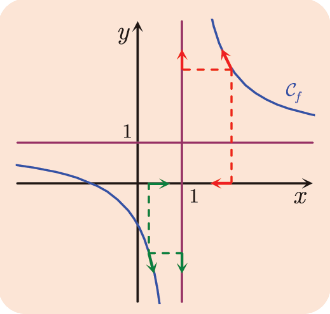
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

وبالمثل عندما يأخذ المتحول x قيماً **سالبة** قريبة من الصفر، فإنّ الأعداد $\frac{1}{x}$ تصبح سالبة وكبيرة بقيمتها المطلقة، وتنتهي بأن تصبح أصغر من أي عدد حقيقي M، مهما كان سالباً وكبيراً بالقيمة المطلقة، أي إذا كان $\left(-\frac{1}{M} < x < 0\right)$ كان $\left(\frac{1}{x} < -M\right)$

نقول في هذه الحالة أن **نهاية التابع f من اليسار** عند الصفر هي $-\infty$. ونكتب عندئذ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

كيف نتوقع نهاية تابع كسري في نقطة خارج مجموعة تعريفه؟



مثال ليكن التابع f الكسريّ المعرّف على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ كما يأتي $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. العدد 1 يقع على طرف أحد مجالات التعريف، يمكننا إذن دراسة نهاية التابع عندها. نعلم أنّ

$$\lim_{x\to1}(x-1)=0 \text{ و } \lim_{x\to1}(x+1)=2$$

عند قسمة أعداد قريبة من 2 على أعدادٍ قريبة من الصفر نحصل على أعداد كبيرة بقيمتها المطلقة. ولكن ما هي إشارتها ؟ إذا كانت $(x-1)>0$ وقريبة من الصفر، يصبح الكسر موجباً وكبيراً، وإذا كانت $(x-1)<0$ وقريبة من الصفر، يصبح الكسر سالباً وكبيراً بالقيمة المطلقة. وهكذا كما في المثال السّابق ندرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

- **من اليمين**: نتأمّل مقصور f على المجال $]1,+\infty[$. عندما يقترب x من العدد 1 من اليمين يكون $x-1>0$ و يكون $(x+1)$ قريباً من 2. إذن تبقى القيم $\dfrac{x+1}{x-1}$ موجبة وتصبح كبيرة جداً.

نقول إنّ نهاية التابع f من اليمين عند 1 هي $+\infty$. ونكتب $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$.

- **من اليسار**: نتأمّل مقصور f على المجال $]-\infty,1[$. عندما يقترب x من العدد 1 من اليسار يكون $(x-1)<0$ و يكون $(x+1)$ قريباً من 2. إذن تبقى القيم $\dfrac{x+1}{x-1}$ سالبة وتصبح كبيرة جداً بقيمتها المطلقة.

نقول إنّ نهاية التابع f من اليسار عند 1 هي $-\infty$. ونكتب $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$.

تَدرَّبْ

ادرس نهايات التوابع المبيّنة أدناه عند النقطة a المعطاة. قد يلزم مناقشة وجود نهاية من اليمين ومن اليسار في بعض الحالات.

① $f(x)=\dfrac{2x-5}{\sqrt{x}},\quad a=0$

② $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3},\quad a=0$

③ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1},\quad a=-1$

④ $f(x)=\dfrac{2x}{x^3-9},\quad a=3$

4 مبرهنات النهايات

تفيد المبرهنات الآتية، التي سنعرضها في جداول، في حساب نهايات التوابع $f+g$ و fg و $\frac{f}{g}$ إذا كنا نعرف نهاية f و g. هذه النهايات مأخوذة إما عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند نقطة ما a من $\mathbb{R}$.
في الجداول أدناه ℓ و ℓ' هي أعداد حقيقية. الخانات ذات اللّون الأحمر تدل على الحالات التي لا تسمح باستنتاج النهاية والتي نسميها **حالات عدم التعيين**. في بقية الحالات، نقبل النتائج المبيّنة وهي سهلة التوقّع حدسياً، فمثلاً إذا كان $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$ وكان $\lim_{x\to1} g(x)=3$ فإننا نتوقّع أن يكون $\lim_{x\to1}\big(f+g\big)(x)=+\infty$.

1.4. نهاية المجموع

نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

2.4. نهاية الجداء

نهاية f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية fg	$\ell\cdot\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

3.4. نهاية الكسر

1.3.4. نهاية g لا تساوي الصفر

نهاية f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية g	$\ell'\neq0$	$+\infty$ أو $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

2.3.4. نهاية g تساوي الصفر

نهاية f	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	0
نهاية g	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

4.4. أشكال عدم التعيين

عندما نكون بصدد حالة عدم تعيين فإننّا لا نستطيع أن نحدّد النهاية اعتماداً على الجداول السابق، وتلزم دراسة أكثر تفصيلاً في هذه الحالة. هذه الحالات الأربع هي

$$«\frac{0}{0}» \quad «\frac{\infty}{\infty}» \quad «0\times\infty» \quad «\infty-\infty»$$

هذه الكتابة هي رموز لتسهيل حفظ حالات عدم التعيين وليس لها معنى رياضي إذ لا يجوز مثلاً أن يكون المقام معدوماً في الكسر الأول.

تكريساً للفهم

كيف نستفيد من المبرهنات السابقة؟

① نهاية مجموع

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

② نهاية جداء

- $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x\right)\sqrt{x}=0$ ، لأن $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\sqrt{x}=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

③ نهاية كسر

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x}}=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to0^+}2x-3=-3$ و $\sqrt{x}$ يبقى موجباً و $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$.
- الكسر $\dfrac{x+1}{x-1}$ ليس له نهاية عند 1، إذ نلاحظ أن نهاية البسط هي $\lim\limits_{x\to1}x+1=2$ أمّا المقام فنهايته 0. عندما يكون $x>1$ يكون المقام موجباً وينتهي الكسر إلى $+\infty$. ومن الجهة الأخرى نجد أنه عندما يكون المتحول $x<1$ يكون المقام سالباً وينتهي الكسر إلى $-\infty$. أي لدينا

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$$

④ حالات عدم تعيين

- لندرس سلوك التابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ عند $+\infty$.

نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ أيضاً، إذن نحن هنا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. ولكن $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ وفي هذه الصّيغة الجديدة للتابع f يزول عدم التعيين ونجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

- لندرس سلوك التابع $g(x)=x-\sqrt{x}$ عند $+\infty$.

نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ أيضاً، إذن نحن هنا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$، ولا نستطيع الاستنتاج بالاستفادة من مبرهنات النهايات. حدسيّاً نتوقّع أن يكون $\sqrt{x}$ مهملاً أمام x عندما تكون قيم x كبيرة. ونتوقّع أن تكون نهاية التابع عند $+\infty$ هي $+\infty$.

لإثبات ذلك إثباتاً صحيحاً، نُخرج الحدّ المُسَيْطِر x عاملاً فنجد $g(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. ونعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$. ولدينا، من جهة أخرى $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$، إذن لقد زال عدم التعيين ويمكننا أن نستنتج النهاية من المبرهنات ونجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

في حالات عدم التعيين "يمكن أن يحدث أي شيء" أي يمكن أن تكون النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ أو عدداً حقيقياً ℓ أو يمكن ألا تكون النهاية موجودةً.

تَدرُّبْ

① احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(fg)(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية.

❶ $g(x)=x$ و $f(x)=2x+6$.

❷ $g(x)=-x^2$ و $f(x)=3x^2+9$.

❸ $g(x)=-2x^3$ و $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

② احسب النهايات الآتية.

❶ $\lim_{x\to+\infty}(x^3-x)$ ❷ $\lim_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x-1}}$

❸ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x\sqrt{x})$ ❺ $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)$

❺ $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x^2}+x\right)$ ❻ $\lim_{x\to1^+}\dfrac{x}{x^2-1}$

❼ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^2-x}$ ❽ $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{-x}-x^2)$

5 دراسة توابع كثيرات الحدود والتوابع الكسّرية

1.5. نهاية كثيرات الحدود عند $+\infty$ وعند $-\infty$

• لندرس المثال الآتي ثم ننتقل بعد ذلك إلى الحالة العامّة.

مثال ليكن f تابعاً كثير الحدود معرّفاً على $\mathbb{R}$ كما يأتي

$$f(x)=x^3-x^2-5x+1$$

حدسياً نتوقع أن يكون $5x$ و x^2 مهملين أمام x^3 عندما يأخذ المتحوّل x قيماً كبيرة. وذلك لأن $\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^3}$ و $\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^3}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

نسمي الحدّ x^3 الحدّ المسيطر في التابع كثير الحدود f. لنخرج الحدّ المسيطر عاملاً من عبارة f، فنجد

$$f(x)=x^3\left(1-\frac{1}{x}-5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right).$$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}-5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ استنتجنا مباشرة، واستناداً إلى مبرهنات النهايات، أنّ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

أمّا عند $-\infty$ فلدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}-5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$. إذن

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

• لندرس الآن الحالة العامّة:

ليكن $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ تابعاً كثير الحدود من الدّرجة n (أي إن $a_n\neq 0$). عندما $x\neq 0$ ، يمكننا كتابة f بالشكل الآتي.

$$f(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$$

وذلك بإخراج الحدّ المسيطر a_nx^n عاملاً. لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_{n-1}}{a_nx}=0 \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{a_nx^n}=0$$

ومنه نستنتج

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)=1$$

إذن نهاية التابع كثير الحدود f عند $+\infty$ هي نهاية الحدّ المسيطر a_nx^n نفسها. ونثبت بالأسلوب نفسه النتيجة السابقة عند $-\infty$. وهكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية.

مُبرهَنة 1

عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$، نهاية تابع كثير الحدود هي نفسها نهاية حدِّه المُسيْطر، أي الذي له أعلى درجة.

تنبّه إلى أنّ ما سبق ليس صحيحاً إلاّ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.

مثال

• $\lim_{x\to+\infty}(5x^2-6x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}5x^2=+\infty$.

• $\lim_{x\to+\infty}(-3x^4+x^3-2x+1)=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}-3x^4=-\infty$.

• $\lim_{x\to-\infty}(4x^3-2x^2+4)=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty}4x^3=-\infty$.

مثال دراسة تابع كثير الحدود من الدرجة الثالثة.

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. ادرس التابع f وارسم المنحني $\mathcal{C}_f$.

الحل

• **الاطراد** f تابع كثير الحدود، فهو معرّف وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقّه هو

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

لندرس إشارة المشتق الذي هو كثير حدود من الدّرجة الثّانية $\left(-x^2 + 4x - 3\right)$ جذراه 1 و 3. إذن $-x^2 + 4x - 3 > 0$ عندما يكون x في المجال $]1,3[$ ويكون سالباً خارج هذا المجال.

وهكذا نكتب جدول الاطّراد

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

هناك قيمة صغرى محليّاً عند $x = 1$، وقيمة التابع عندها هي $f(1) = -\frac{1}{3}$. وهناك قيمة كبرى محليّاً عند $x = 3$، وقيمة التابع عندها هي $f(3) = 1$.

• **جدول تغيرات التابع**

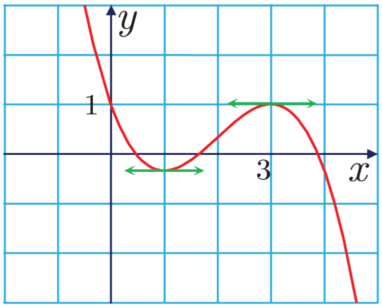
نضيف إلى الجدول السابق دراسة النهايات عند أطراف مجموعة التعريف: التابع f تابع كثير حدود، إذن نهايته عند $+\infty$ هي نهاية الحدّ المسيطر $-\frac{x^3}{3}$ أي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

وبذلك نكمل الجدول السابق فيصبح

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

• **رسم المنحني.** نستفيد هنا من المعلومات المسجلّة في الجدول السابق. ويمكننا زيادة دقة الرسم بحساب إحداثيّات بعض النقاط الإضافيّة من المنحني:

x	-1	0	2	4
$f(x)$	$\frac{19}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$



كذلك نعرف أن $f'(1) = f'(3) = 0$ أي إن المماس في هاتين النقطتين أفقي.

يظهر من الرسم أن النقطة $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ هي نقطة تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$. نتحقّق من ذلك بحساب المقدار: $f(2+h) + f(2-h)$، فنجد $\frac{2}{3}$.

2.5. نهاية تابع كسري عند $+\infty$، وعند $-\infty$

• لندرس المثال الآتي ثم ننتقل بعد ذلك إلى الحالة العامّة.

مثال ليكن f تابعاً كسريّاً معرّفاً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ كما يأتي : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

إن f هو خارج قسمة تابع كثير الحدود $P(x)=x^2-3x+6$ على تابع كثير الحدود $Q(x)=x-1$. نهاية P عند $+\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر x^2 أي $+\infty$، وكذلك نهاية Q عند $+\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر x أي $+\infty$. لإزالة عدم التعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ نخرج الحدّ المسيطر من كلّ من البسط والمقام وذلك في حالة $x\neq 0$ فنجد

$$f(x)=\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

ولكن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$. نستنتج بناءً على مبرهنات النهايات أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. ونجد بأسلوب مشابه

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

• الحالة العامة: نقبل صحّة المبرهنة الآتية علماً أنّ إثباتها هو كما في المثال السابق تماماً

مُبرهَنة 2

عند $+\infty$، وكذلك عند $-\infty$، نهاية التابع الكسريّ

$$x\mapsto f(x)=\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_px^p+\cdots+b_0} \quad \text{إذ} \quad (a_n\neq 0, b_p\neq 0)$$

هي نفسها نهاية $x\mapsto\dfrac{a_nx^n}{b_px^p}$.

تنبّه إلى أنّ ما سبق ليس صحيحاً إلاّ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.

مثال

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+1}{x^5+x}\right)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+51}{2x+x}\right)=\dfrac{3}{2}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-7x}{x+9}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

3.5. المقارب المائل

لنتأمّل التابع الكسريّ F خارج قسمة تابعين كثيري الحدود: $F(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$. ولنفترض أنّ

$$\deg A = 1 + \deg B$$

عندئذ بإجراء قسمة إقليديّة لكثير الحدود $A(x)$ و $B(x)$ نجد أنّ خارج القسمة $Q(x)$ هو كثير حدود من الدرجة الأولى: $Q(x)=ax+b$ أمّا باقي القسمة $R(x)$ فهو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة B (وقد يكون معدوماً). في هذه الحالة نستنتج من المساواة $A(x)=Q(x)B(x)+R(x)$ أنّ

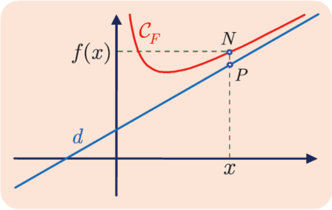
$$F(x)=ax+b+r(x) \quad \text{حيث} \quad r(x)=\frac{R(x)}{B(x)} \text{ و } a\in\mathbb{R}^* \text{ و } b\in\mathbb{R}$$

وبوجه خاصّ يكون لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} r(x)=0 \text{ و } \lim_{x\to\infty} r(x)=0 \,.$$

لنرمز بالرمز d إلى المستقيم ذي المعادلة $y=ax+b$ في مَعْلم متجانس. ولنتأمّل النقطة $N(x,f(x))$ التي فاصلتها x من منحنى التابع f والنقطة $P(x,ax+b)$ التي فاصلتها x من المستقيم d. عندئذ نلاحظ أنّ

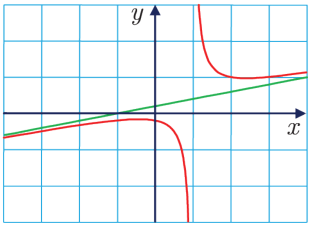
$$PN=\left|f(x)-(ax+b)\right|=\left|r(x)\right|$$



وتقترب المسافة PN من الصفر عندما يصبح x كبيراً بالقيمة المطلقة. أي إنّ منحنى التابع يقترب من المستقيم d عندما يصبح x كبيراً بالقيمة المطلقة. نسمّي المستقيم d مقارباً مائلاً للمنحنى $\mathcal{C}_f$ (عند $+\infty$ أو عند $-\infty$).

مثال يكتب التابع الكسريّ $F(x)=\dfrac{x^2+1}{5(x-1)}$ بالصيغة المُكافئة:

$$F(x)=\tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{5}+\frac{2}{5(x-1)}$$



هنا لدينا $r(x)=\dfrac{2}{5(x-1)}$, $b=\dfrac{1}{5}$, $a=\dfrac{1}{5}$، ونلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to-\infty} r(x)=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} r(x)=0 \,.$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$ هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_F$.

تكريساً للفهم

أيمكن للمنحني أن يقطع مقاربه المائل؟

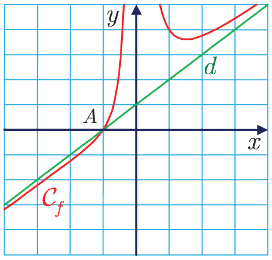
مثال ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ بالعلاقة

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

إنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مستقيمٌ مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$، وذلك لأنّ الفرق

$$f(x) - \left(x + 1\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

يسعى إلى الصفر عند $+\infty$، وكذلك عند $-\infty$.



وهنا نلاحظ أنّ إشارة المقدار

$$f(x) - \left(x + 1\right) = \frac{x + 1}{x^2}$$

هي إشارة البسط $x + 1$، فعندما $x > -1$ يقع جزء المنحني الموافق فوق المستقيم d، وفي حالة $x < -1$ يقع جزء المنحني الموافق تحت المستقيم d. والمنحني يقطع المقارب في النقطة $A(-1,0)$.

كيف نثبت أن مستقيماً معطى هو مستقيم مقارب لمنحن؟

مثال لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ بالصيغة: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x - 2}$.

1. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقاربٌ مائل لمنحني التابع f.
2. ادرس وضع المنحني بالنسبة إلى المقارب d.

عموماً، لإثبات أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب لمنحني التابع f عند $+\infty$، نثبت أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$. وكذلك نفعل عند $-\infty$.

ولدراسة وضع المنحني بالنسبة إلى المقارب، ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$.

الحل

1. نلاحظ أولاً أنّ

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 2} - (2x + 1) = \frac{7}{x - 2}$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x - 2} = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب لمنحني التابع f عند $+\infty$. وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x - 2} = 0$ إذن d هو أيضاً مستقيم مقارب لمنحني التابع f عند $-\infty$.

2. إنّ إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)=\dfrac{7}{x-2}$ هي إشارة المقام $x-2$ ذاتها. أي إذا كان $x>2$ كان $f(x)-(2x+1)>0$ ، أي إنّ جزء الخطّ البياني الموافق لقيم $x>2$ يقع فوق المقارب. وإذا كان $x<2$ كان $f(x)-(2x+1)<0$ أي إن جزء الخطّ البياني الموافق لقيم $x<2$ يقع تحت المقارب.

تَدرَّبْ

① احسب النهايات الآتية.

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-x)$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2x}{x}$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^3}{x^2}$

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+3x^4-1)$

❺ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}$

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^8}{x^2-1}$

❼ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-x}$

❽ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-x^2)$

② ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق $f(x)=1-x-\dfrac{1}{x}$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. أثبت أنّ $\mathcal{C}_f$ يقبل المستقيم Δ ذا المعادلة $y=1-x$ مقارباً مائلاً.
2. ادرس وضع المقارب Δ بالنسبة إلى المنحني $\mathcal{C}_f$.
3. ادرس التابع f . ارسم Δ ثم $\mathcal{C}_f$.
4. ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.
5. عندما يقطع المستقيم الذي معادلته $y=m$ المنحني $\mathcal{C}_f$ في نقطتين مختلفتين M و N عيّن بدلالة m إحداثيّات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.
6. لنرمز A و B إلى النقطتين من $\mathcal{C}_f$ حيث يكون المماس أفقياً. عيّن إحداثيّات A و B ثم أثبت أن النقاط الثلاثة A و B و I تقع على استقامة واحدة.

أنشطة

نشاط 1 ثلاثيّات الحدود من الدّرجة الثّانية

❶ عموميّات

تذكّر أنّ ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية كل تابع f معرّف على $\mathbb{R}$ بصيغة من الشكل:

$$x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

نسميّ المنحني الممثل للتابع f قطعاً مكافئاً $\mathcal{P}$.

1. a. ادرس، مناقشاً وفق إشارة a، نهايتيّ f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
   b. احسب $f'(x)$ وادرس التابع f، مناقشاً وفق إشارة a.
   c. اكتب جدول تغيّرات التابع.
2. بالاستعانة بالنتائج السّابقة علّل كلاً من العبارات الآتية.
   a. فتحة القطع المكافئ $\mathcal{P}$ من الأعلى عندما تكون $a > 0$، ومن الأسفل عندما $a < 0$.
   b. إذا كانت x_0 فاصلة الذروة S في القطع المكافئ $\mathcal{P}$، كان $f'(x_0) = 0$.
   c. المستقيم $x = x_0$ هو محور تناظر للقطع المكافئ $\mathcal{P}$. (راجع الوحدة الأولى).
   d. عندما يكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذران مختلفان x_1 و x_2 يقطع القطع المكافئ محور الفواصل في نقطتين هما $(x_1,0),(x_2,0)$، ويكون $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

❷ كيف نرسم قطعاً مكافئاً بسرعة؟

لنرمز بالرمز $\mathcal{P}$ إلى القطع المكافئ الممثل لمنحني التابع $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 5\right)$.

1. توثّق أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين.
2. عيّن إحداثيّات S ذروة القطع $\mathcal{P}$، وارسم محور تناظره.
3. يمر $\mathcal{P}$ بالنقطة $\left(0,\frac{5}{2}\right)$. كيف نستنتج، دون حساب، أنّه يمرّ بالنقطة $\left(6,\frac{5}{2}\right)$ أيضاً ؟
4. أين تقع فتحة القطع $\mathcal{P}$ ؟
5. تكفي هذه المعلومات، وبعض النقاط المساعدة لرسم $\mathcal{P}$ بسرعة. ارسمه.

❸ تطبيق

أعد الخطوات السابقة لترسم الخطّين البيانيين للتابعين

$f : x \mapsto -x^2 + x - 2$ $\qquad$ $f : x \mapsto 2x^2 + 4x + 1$

نشاط 2 التوابع الهوموغرافية

❶ عموميات

نقول، تعريفاً، إنّ تابعاً f هوموغرافي إذا كان من الصيغة $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ و a,b,c,d أعداد حقيقيّة تحقّق $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$.

1. ماذا نسمّي التابع f إذا كان $c=0$ ؟

2. لنشرح ما فائدة الشّرط $ad-bc \neq 0$. بافتراض أنّ $ad-bc=0$، تيقّن أن f تابعٌ ثابت. (أياً كانت x غير $-\dfrac{d}{c}$، كان $f(x)=\dfrac{a}{c}$)

❷ دراسة بعض التوابع الهوموغرافية

1. a. ادرس التابع $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{2x-4}$، وارسم خطّه البياني $\mathcal{C}_f$.

b. أثبت أنّ النقطة $I\left(2,\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر لمنحني التابع. ولاحظ أن النقطة I هي نقطة تقاطع المقاربين.

c. لنثبت أنّ منحني هذا التابع قطع زائد أي تُكتب معادلته في جملة محاور معيّنة بالشكل $Y=\dfrac{a}{X}$.
نتأمّل المعلم $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$ ونرمز بالرمز (X,Y) لإحداثيّتي نقطة M فيه. أثبت أنّه في هذا المَعْلَم يقبل المنحني $\mathcal{C}_f$ المعادلة $Y=\dfrac{1}{X}$، أي إنّه قطع زائد.

مساعدة: أثبت أنّه إذا كانت إحداثيّاتها النقطة M في الجملة $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي (x,y)، كان $x=X+2$ و $y=Y+\dfrac{3}{2}$. (راجع أنشطة الوحدة الأولى).

2. a. ادرس التابع $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{2x+3}$، وارسم المنحني الممثل له $\mathcal{C}_f$.

b. أثبت أن نقطة تقاطع المقاربين I هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$.

c. أعد ما سبق مع التابع $f : x \mapsto \dfrac{-x+3}{x-2}$.

❸ مركز التناظر في الحالة العامة

ليكن التابع الهوموغرافي $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$، مع $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$.

1. تيقّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$، وأن نهاية f من اليمين عند النقطة $-\dfrac{d}{c}$ هي $+\infty$ أو $-\infty$.
المستقيمان $y=\dfrac{a}{c}$ و $x=-\dfrac{d}{c}$ هما إذن مقاربان للمنحني $\mathcal{C}_f$.

2. أثبت أن نقطة تقاطع المقاربين I هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$.

نشاط 3 دراسة تابع

ليكن التابع f المعرّف على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ بالعلاقة

$$f(x)=\frac{(x+2)^{2}}{(x+1)(x-2)}$$

يهدف هذا النشاط إلى دراسة ورسم التابع f في مَعْلَم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ مراحل دراسة تابع

1. تعين مجموعة التعريف D، عندما لا تكون معطاة في نصّ السّؤال.
2. تبيان إذا كان التابع زوجيّاً أو فرديّاً أو دوريّاً، وفي هذه الحالات يمكن اقتصار الدراسة على جزء من مجموعة التعريف، واستنتاج بعض الخصائص الهندسيّة للمنحني.
3. دراسة اطّراد التابع وتعيين القيم الكبرى والصغرى محليّاً.
4. دراسة النهايات عند أطراف مجموعة التعريف، وتحديد المقاربات إن وجدت.
5. تلخيص هذه المعلومات كلّها في جدول تغيّرات التابع.

❷ تطبيق

لنطبق ما سبق على التابع المعطى أعلاه.

1. لماذا مجموعة تعريف التابع هي $]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$ ؟
2. احسب $f'(x)$، وادرس اطّراد التابع f. عيّن القيم الكبرى والصغرى محليّاً إن وجدت.
3. ادرس إشارة المقدار $(x+1)(x-2)$. وعلّل لماذا لدينا

$$\lim_{x\to(-1)^{+}} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-1)^{-}} f(x)=+\infty \text{ ؟}$$

4. بالمثل عيّن نهاية التابع من اليمين ومن اليسار عند 2. واستنتج المقاربات الشاقوليّة.
5. استفد من المبرهنة 2. لحساب النهايات في $+\infty$ وفي $-\infty$. واستنتج معادلة المقارب الأفقي.
6. أثبت أن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقطع مقاربه الأفقي في نقطة فاصلتها $-\frac{6}{5}$ وادرس وضع المنحني بالنسبة إلى المقارب الأفقي.
7. ضع النتائج السابقة في جدول تغيّرات.

❸ رسم المنحني الممثّل للتابع

من المفيد عند رسم الخطّ البياني لتابع الاهتمام بما يلي:

- رسم المقاربات في حال وجودها.
- تعيين بعض النقاط بحساب إحداثيّاتها، وخصوصاً القيم الكبرى والصغرى محليّاً، والتقاطعات مع المحاور.
- رسم المماسات في بعض النقاط وخصوصاً عند القيم الكبرى والصغرى محليّاً.
- ملاحظة الخواص الهندسية للمنحني، كالتناظر بالنسبة إلى نقطة، أو بالنسبة إلى محور.

طبق ذلك وارسم منحني التابع المدروس أعلاه.

نشاط 4 جماعة من المنحنيات

ليكن m عدداً حقيقياً، ولنعرف التابع كثير الحدود $f_m(x) = x^3 - mx^2 + mx - 1$.

نرمز بالرمز $\mathcal{C}_m$ إلى منحني التابع f_m، فنقرن بكلّ عدد حقيقي m تابعاً f_m ومنحنياً $\mathcal{C}_m$. نعرّف إذن **جماعة من التوابع المتعلقة بالوسيط m**.

1. لنثبت أن كلّ المنحنيات $\mathcal{C}_m$ تمر بنقطتين A و B ثابتتين أي لا تتبعان الوسيط m:

   a. أثبت أن المنحنيين $\mathcal{C}_0$ و $\mathcal{C}_1$ يشتركان بنقطتين A و B يُطلب تعينهما.

   b. أثبت أن كلّ المنحنيات $\mathcal{C}_m$ تمر بالنقطتين المعينتين في الطلب السابق.

2. لنبحث عن حلول المعادلة $f_m(x) = 0$ وذلك عند كلّ قيمة للعدد m:

   a. تيقَّن أنه مهما تكن x و m يكن $f_m(x) = (x-1)\big(x^2 + (1-m)x + 1\big)$.

   b. استنتج عدد حلول المعادلة، وذلك تبعاً لقيمة العدد m.

2. a. احسب $f'_m(x)$ وعين إشارته تبعاً لقيمة العدد m.

   b. اكتب جدول تغيّرات التابع مميِّزاً الحالتين الآتيتين:

$$m \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[\quad \text{أو} \quad m \in]-1, 3[$$

3. ادرس التوابع f_1 و f_3 و f_0 و f_{-2} وأنشئ، في المَعْلَم المتجانس نفسه، الخطوط البيانيّة $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_3$ و $\mathcal{C}_0$ و $\mathcal{C}_{-2}$.

تمرينات ومسائل

1 احسب النهايات $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x)$ ، وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $g(x) = -x$ و $f(x) = 2x+1$.

② $g(x) = -x^2$ و $f(x) = x^2+1$.

③ $g(x) = -2x$ و $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

2 احسب النهايات $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} (fg)(x)$ ، وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $g(x) = \dfrac{1}{x}$ و $f(x) = x^2$.

② $g(x) = x$ و $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

③ $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$ و $f(x) = 5x^3+1$.

3 احسب النهايات $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ ، وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $g(x) = \dfrac{2}{x}$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

② $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ و $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

③ $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

4 ادرس نهايات التوابع المبيّنة أدناه عند النقطة a المعطاة. قد يلزم مناقشة وجود نهاية من اليمين ومن اليسار في بعض الحالات.

① $a = 0$ ، $f(x) = \dfrac{2x-5}{x}$

② $a = 0$ ، $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2}$

③ $a = 2$ ، $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$

④ $a = 1$ ، $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

5 احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

① $f(x) = 3x^2+1$

② $f(x) = x^3+x^2-1$

③ $f(x) = 10^{-3}x^3 - 5x + 10^6$

④ $f(x) = 2 - x - x^2$

6

أوجد النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لكلٍّ من التوابع الكسريّة.

① $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$ ② $f(x)=\dfrac{-3x+12}{x-1}$

③ $f(x)=\dfrac{x^2+12}{x^2-8}$ ④ $f(x)=\dfrac{-x^2}{x^2+5}$

⑤ $f(x)=\dfrac{10^5}{(0.1)x}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+7}$

⑦ $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3}$ ⑧ $f(x)=\dfrac{x^3-x+5}{3x^2-2x+1}$

7 قراءة جداول التغيّرات

اعتماداً على جدول التغيّرات المبيّن أدناه، عيِّن مجموعة تعريف كلّ تابع، ونهاياته عند أطراف مجموعة التعريف، ومجالات التزايد والتناقص.

①

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

②

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	1

③

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

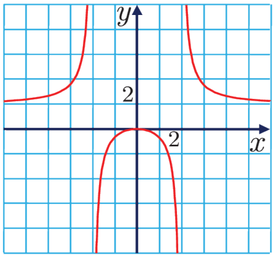
④

x	$-\infty$		-2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4

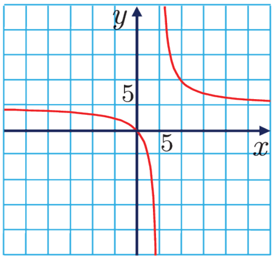
8 قراءة الرّسم البياني

اعتماداً على منحني التابع المبين أدناه، اكتب جدول التغيّرات. هل يمكنك توقّع المقاربات من الرّسم؟

①



②



9 ادرس التوابع الآتية، مبيّناً محور التناظر، ثم ارسم الخطوط البيانيّة التي تمثّلها.

① $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ② $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

③ $f(x) = 2 - x - x^2$ ④ $f(x) = 2\left(x-1\right)\left(x-3\right)$

10 ادرس التوابع الآتية، مبيّناً أن النقطة I المعطاة هي مركز تناظر الخطّ البياني للتابع، ثُمَّ ارسم هذا الخطّ.

① $I(0,1)$ $f(x) = x^3 - x + 1,$

② $I(0,-1)$ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - 1,$

③ $I(-1,10)$ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1,$

④ $I\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ $f(x) = -x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 1,$

11 ادرس التوابع الكسرية الآتية، وحدد مراكز التناظر والمقاربات في حال وجودها. ثم ارسم خطوطها البيانيّة.

① $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ ② $f(x) = \dfrac{x-10}{x-5}$

③ $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2}$ ④ $f(x) = \dfrac{3x+1}{1-x}$

12 ادرس التابع الكسري f، وأثبت أن المستقيم Δ المعطى هو مقارب مائل لمنحني التابع $\mathcal{C}_f$، ادرس وضع $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المقارب، ثُمّ ارسم $\mathcal{C}_f$، في كلٍّ من الحالات الآتية:

① $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x}$, $\Delta : y = x - 2,$

② $f(x) = \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{1}{x^2}$, $\Delta : y = \dfrac{x+1}{4},$

③ $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 1}{x}$, $\Delta : y = x + 5,$

④ $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{3x}$, $\Delta : y = x - 2,$

13 نقرن بكل عدد حقيقي b التابع كثير الحدود $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + bx + 2$.

1. عين b ليكون المماس في النقطة التي فاصلتها 1 موازياً للمستقيم $y = 2x$.
2. ادرس التابع f وارسم خطّه البياني $\mathcal{C}_f$.

لنتعلّم البحث معاً

14 هل يوجد تابع كسري f من الشكل $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ يحقّق $f(2)=2$، ويقبل خطّه البياني $\mathcal{C}_f$ مقاربين $x=1$ و $y=1$؟

نحو الحلّ

فهم السؤال.

نهدف إلى تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c, d ومن ثم تعيين $f(x)$ الذي يحقّق ثلاثة شروط وهي:

① $f(2)=1$ و ② $x=1$ مقارب لـ $\mathcal{C}_f$ و ③ $y=1$ مقارب لـ $\mathcal{C}_f$.

بحثاً عن طريق.

- لنفترض وجود تابع f يحقّق الشرط المعطاة. لمّا كان للخطّ $\mathcal{C}_f$ مستقيمين مقاربين استنتجنا أن $c\neq 0$ وإذن بقسمة البسط والمقام على c يمكننا كتابة التّابع بالصيغة: $x\mapsto f(x)=\dfrac{px+r}{x+\ell}$
- كيف نستفيد من الشّرط ③ في تعيين p؟
- كيف نستفيد من الشّرط ② في تعيين ℓ؟
- كيف نستفيد من الشّرط ① في تعيين r؟
- تحقق أنّ التابع f الذي وجدته يحقّق شروط نصّ المسألة جميعها.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

15 هل يوجد تابع كثير حدود f من الدّرجة الثّالثة، فرديّ، ويقبل خطّه البياني $\mathcal{C}_f$ مماساً أفقيّاً في النقطة $A(1,1)$؟

نحو الحلّ

فهم السؤال.

لنفترض وجود تابع f يكتب بالصيغة $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ نهدف إلى تعيين الأعداد a و b و c و d التي تجعل f يحقّق الشرطين ① f فردي و ② يقبل $\mathcal{C}_f$ مماساً أفقياً في $A(1,1)$.

بحثاً عن طريق.

- الشرط ① يفيد في تعيين $f(0)$، ماذا تستنتج؟
- الشرط ① يفيد في حساب $f(1)+f(-1)$ أيضاً، ماذا تستنتج بشأن الثابتين b و d؟
- الشرط ② يفيد في تعيين $f(1)$ و $f'(1)$، عيّنهما واستفد من ذلك في تعيين f.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

16 حلّ المتراجحة الآتية.

$$-x^2+7x-4<\frac{x+4}{x-1}$$

نحو الحلّ

فهم السؤال.

نلاحظ أنّ لكلّ طرف من طرفي المتراجحة المعطاة صيغة تابع نعرف كيف ندرسه وكيف نمثّل خطّه البياني لنرمز إذن إلى الطرف الأيسر بالرمز $f(x)$ وإلى الطرف الأيمن بالرمز $g(x)$. ولنحاول حل المتراجحة $f(x)<g(x)$.

بحثاً عن طريق.

- ادرس التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-x^2+7x-4$.
- ارسم الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ الممثّل للتابع f في مَعْلم متجانس.
- ادرس التابع g المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $g(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$.
- ارسم المنحني $\mathcal{C}_g$ الممثّل للتابع g في المَعْلم نفسه.
- حلّ جبريّاً المعادلة $-x^2+7x-4=\dfrac{x+4}{x-1}$.
- استنتج من كلّ ما سبق حلول المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

17 تعيين تابع

1. عيِّن النقطة $A(-2,1)$ في مَعلَم متجانس، وارسم المستقيمين $d: x=-1$ و $\Delta: y=2$.
2. ليكن التابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$. عين الأعداد a و b و c ليمرّ الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع بالنقطة A ويقبل d مقارباً شاقوليّاً، و Δ مقارباً أفقيّاً.
3. ادرس التابع f وارسم $\mathcal{C}_f$.

18 لنتأمّل جماعة التوابع f_m المعرّفة على الوجه الآتي : $f_m(x)=\dfrac{mx+2}{x-m}$ حيث $m\in\mathbb{R}$. نرمز إلى الخطّ البياني للتابع f_m بالرمز $\mathcal{C}_m$. عيِّن الخطوط البيانيّة $\mathcal{C}_m$ التي تحقّق «المماس في النقطة التي فاصلتها $x=2$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $3x+y=0$ و $f(2)\geq 0$».

19 دراسة توابع

ادرس التوابع الآتية وارسم الخطّ البياني الممثل لكلٍ منها، وفي حال وجود مقارب أفقي أو مائل Δ بيِّن وضع المنحني بالنسبة لهذه المقاربات، معيِّناً نقاط التقاطع معها.

① $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}$ ② $f(x) = x^3 + x - 2$

③ $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$ ④ $f(x) = -2x^4 + x^2 - 1$

⑤ $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$ ⑧ $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)}$

20

لتكن b عدداً مختلفاً عن الصفر. ولنتأمّل التوابع الثلاثة الآتية.

$$f(x) = \frac{x^2+bx}{x^2-x-2}$$
$$g(x) = \frac{2x+b}{(x+1)(x-2)}$$
$$h(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{b}{x-2} + 1$$

1. أيُّ هذه التوابع يقبل المستقيمات الثلاث الآتية مقاربات له، وليس له مقاربات غيرها؟

$$\Delta : y = 1, \quad d_1 : x = -1, \quad d_2 : x = 2$$

2. عيِّن قيمة العدد b التي تجعل منحني التابع المعيّن في الطلب 1. يقطع المستقيم Δ عند $x = 1$.
3. عين قيمة العدد b كي يكون لمنحني التابع المعيّن في الطلب 1. مماساً أفقيّاً في المبدأ O.

21

ليكن التابعين f و g المعرّفين على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالعلاقتين :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

أثبت أنّ للمنحنيين C_f و C_g المقاربات الشاقوليّة والمائلة نفسها. ثم عيّن نقطة تقاطع المنحنيين إن وُجدت.

22

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1,4\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$، و C_f خطّه البياني.

1. ادرس التابع f، ثم ارسم C_f.
2. بالاعتماد على الرّسم، ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

23 بيّن صحّة أو خطأ كلٍّ من المقولات الآتية مُعلِّلاً إجابتك. ليكن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الخطّان البيانيّان الممثِّلان للتابعين

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x - 1} \quad \text{و} \quad g(x) = 2x + 1 + \frac{x}{(x-1)^2}$$

① للخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ المقاربات نفسها.

② ليس للخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ نقاط تقاطع.

③ لكلٍ من الخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مركز تناظر.

24 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f.
2. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد $\alpha \in \mathbb{R}$. واحسب قيمة α بتقريب 10^{-2}.
3. استنتج مما سبق إشارة $f(x)$، ثم ارسم المنحني $\mathcal{C}_f$.

25 ليكن f_1 و f_2 التابعين المعرّفين كما يلي: $f_1(x) = \frac{x-2}{1+x}$ و $f_2(x) = \frac{x-2}{1-x}$.

1. ادرس كلّاً من التابعين f_1 و f_2، وارسم خطّيهما البيانيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في المعلم نفسه.
2. استنتج ممّا سبق الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ الممثل للتابع f المعرّف وفق $f(x) = \frac{x-2}{|x|+1}$.
3. هل يقبل التابع f الاشتقاق عند $x = 0$ ؟

26 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4$، وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f.
2. أثبت أن النقطة $I(1,1)$ هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$ ثم ارسم $\mathcal{C}_f$.
3. ليكن التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$. وليكن $\mathcal{C}_g$ خطّه البياني. ادرس التابع g، ثم ارسم $\mathcal{C}_g$ في المعلم نفسه.
4. عيّن نقاط التقاطع الممكنة بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

27 هل يوجد تابع كثير حدود f من الدّرجة الثّالثة، ويقبل خطّه البياني $\mathcal{C}_f$ مماساً أفقياً في النقطة $A(0,3)$، ومتناظر بالنسبة إلى النقطة $I(1,2)$؟ في حال وجود هذا التابع ادرسه وارسم خطّه البياني.

28 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f.
2. أثبت أن النقطة $I(1,-3)$ هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$. ثُمّ ارسم الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$.
3. ليكن التابع g المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $g(x) = \dfrac{4-x}{x+1}$. وليكن $\mathcal{C}_g$ خطّه البياني. ادرس هذا التابع، وعين مقارباته الأفقيّة والشاقوليّة، ثم ارسم $\mathcal{C}_g$ في المعلم نفسه.
4. أثبت أن الخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يمران بالنقطة $A(0,4)$. ثم عيّن جميع نقاط تقاطع $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.
5. أثبت أن اثنتين من هذه النقاط متناظرتين بالنسبة إلى النقطة I.
6. أثبت أن للخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مماس مشترك في النقطة A. عيّن معادلته.

29 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس نهايات f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
2. عيّن الأعداد a,b,c,d,e التي تُحقّق :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\quad f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{dx+e}{x^2-1}$$

3. لنعرف التابع g وفق $g(x) = x^2 + 1$ وليكن $\mathcal{C}_g$ خطّه البياني. أثبت أن نهاية التابع $(f-g)$ عند $+\infty$ هي الصفر وكذلك عند $-\infty$. (أي إن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقترب من القطع المكافئ $\mathcal{C}_g$ عندما يكون المتحول x كبيراً بقيمته المطلقة. نقول في هذه الحالة إن $\mathcal{C}_g$ هو قطع مكافئ مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$).
4. ادرس وضع المنحني $\mathcal{C}_g$ بالنسبة لـ $\mathcal{C}_f$. (أي إشارة الفرق $(f-g)$)
5. أثبت أن $\mathcal{C}_f$ يقبل مستقيمين مقاربين أوجدهما.
6. ادرس كلاًّ من التابعين f و g ثمّ ارسم $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

30 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x^3-7x^2+3x-3}{(x-2)^2}$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f .
2. أثبت وجود الأعداد a,b,c,d بحيث أيّاً كان x من $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

3. استنتج وجود مقارب مائل Δ وحدد وضعه بالنسبة للمنحني $\mathcal{C}_f$.
4. ارسم $\mathcal{C}_f$ و Δ .
5. بالاعتماد على الرّسم، ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة

$$2x^3-(7+m)x^2+(3+4m)x-4m-3=0$$

31 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. بملاحظة أن $f(x)=1-\dfrac{x+2}{x^2}$ أوجد النهاية من اليمين ومن اليسار عند الصفر.
2. ادرس نهايتيّ f في $+\infty$ وفي $-\infty$.
3. أثبت أن $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الفواصل في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثيّاتهما.
4. احسب المشتق f' . وادرس التابع f واكتب جدولاً بها، ثم ارسم المنحني $\mathcal{C}_f$.
5. في المعلم نفسه، ارسم الخطّ البياني $\mathcal{H}$ للتابع $h(x)=1-\dfrac{1}{2x}$ المعرف على $\mathbb{R}^*$.
6. ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.
7. عندما يقطع المستقيم $y=m$ المنحني $\mathcal{C}_f$ في نقطتين مختلفتين M و N عين بدلالة m إحداثيّات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.
8. أثبت أن النقطة I تقع على المنحني $\mathcal{H}$.

5

المتتالية ونهايتها

1. تعريف متتالية
2. المتتاليات المتزايدة، والمتتاليات المتناقصة
3. المتتاليات الحسابيّة
4. المتتاليات الهندسيّة
5. مجموع حدود متوالية لمتتالية
6. تقارب المتتاليات

غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي أو الكاشاني (1380م-1436م)، عالِمٌ إسلامي كان أوّل مَن حسب ست عشرة خانة عشرية بعد الفاصلة من العدد π وكتب ذلك في مؤلّفه "الرّسالة المحيطيّة" عام 1424م.

فإذا كان P_n هو طول ضلع المضلع المنتظم ذي n ضلعاً المرسوم في دائرة نصف قطرها يساوي الواحد، وكان T_n طول ضلع المضلع المنتظم ذي n ضلعاً المماس للدائرة ذاتها، فقد أثبت الكاشي أنّ P_{2n} و T_{2n} يُحسبان بدلالة P_n و T_n من العلاقتين :

$$T_{2n} = \frac{T_n}{2 + \sqrt{4 + T_n^2}} \quad \text{و} \quad P_{2n} = \frac{P_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - P_n^2}}}$$

إنّ محيط الدائرة الذي يساوي 2π محصور بين محيطَي هذين المضلعين:

$$nP_n < 2\pi < nT_n$$

حسب الكاشي محيط المضلع الذي عدد أضلاعه 3×2^{28}، واعتبر المتوسّط الحسابي لمحيطَي هذين المضلّعين قيمة مناسبة لتمثيل العدد 2π فوجد $\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,25$.

من بين الأعداد الواقعة إلى يمين الفاصلة، العدد الأخير- وهو الخمسة - غير صحيح، ويجب أن يكون 38 بدلاً منه.

ملاحظة: لو عرف الكاشي لحسب ثلث مجموع ضعفي محيط المضلّع الداخلي ومحيط المضلع الخارجي ولكان حسب بذلك العدد π بأربع وثلاثين خانة عشريّة صحيحة، ولكن أنّى له أن يعرف ذلك.

5

المتتاليات

انطلاقة نشطة

المتتالية هي قائمة مرتّبة من الأعداد.

- نستعمل تكراراً المتتاليات في حياتنا اليوميّة فمثلاً

لدراسة تطوّر أسعار سلعة ما، ندوّن سعرها p_0 في البدء أي عند ورودها إلى السوق، ثُمّ ندوّن سعرها p_1 بعد مضي شهر على تاريخ ورودها إلى السوق، وسعرها p_2 بعد شهرين من ذلك التاريخ،...، وسعرها p_n بعد مضي n شهراً على تاريخ ورودها إلى السوق. فالمتتالية هي p_0 ، p_1 ، p_2 ،...، p_n ،...، ونرمز إليها بالرمز $(p_n)_{n\geq 0}$.

في الرياضيّات، لا تتوقّف المتتاليات عند حدٍّ، فهي لذلك تفيد في وصف العديد من الحالات الواقعيّة. وبوجه خاصّ، سنرى أنّها تفيد في إيجاد تقريبات بالدقّة التي نريد لأعداد أو لمقادير مجهولة.

نشاط علم الأحياء

- يريد عالم أحياء دراسة تطوّر مستعمرة جرثوميّة. فاستخلص من دراسته الجدول الآتي.

الساعة	10 h 00	10 h 20	10 h 40	11 h 00	11 h 20
العدد	1000	2010	4000	7900	16000

① هل يبيّن الجدول أعلاه تطوّراً منتظماً إلى حدٍّ ما؟ لكي يتمكّن من استشراف التغيّرات في عدد جراثيم المستعمرة، وضع عالِم الأحياء نموذجاً يتوقّع بموجبه أن يتضاعف عدد الجراثيم مرّتين كلَّ 20 دقيقة. وللتوثُّق من صحة افتراضه، يُحصي عدد جراثيم المستعمرة عند الظهيرة فيجده 65000 تقريباً. هل عليه إعادة النظر بالنموذج؟

② نقبل إذن أنّ عدد الجراثيم في المستعمرة يتضاعف مرّتين كلَّ 20 دقيقة. كم مرّة يتضاعف عدد الجراثيم بعد ساعة من الزّمن؟ بعد ساعتين؟

③ نرمز بالرمز p_0 إلى عدد الجراثيم عند البدء، وبالرّمز p_1 إلى عددها عند السّاعة 10 h 20، وهكذا دواليك، كيف نرمز إلى عدد الجراثيم عند الساعة 12 h؟ عند الساعة 14 h؟ عبّر عن p_n بدلالة العدد الطبيعي n.

④ يعود العالِم إلى مختبره الساعة العاشرة من صباح اليوم التالي، قدِّر عدد الجراثيم التي سيجدها في المستعمرة.

1 تعريف متتالية

أن نصطنع متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هو أن نقرن بكل عدد طبيعيّ n من $\mathbb{N}$ عدداً حقيقيّاً نرمز إليه بالرمز u_n.

مثال

- لنقرن بكلّ عدد طبيعيّ ضعفيه. نحصل عندئذ على متتالية لانهائيّة من الأعداد الحقيقيّة، (الأعداد الزوجيّة). فضعف العدد 0 هو $u_0 = 0$، وضعف العدد 9 هو $u_9 = 18$، وضعف عددٍ كيفي n هو $u_n = 2n$.
- لنقرن بكلّ عدد طبيعيّ n العدد $v_n = \sqrt{n+1}$. فنعرّف بذلك متتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ من الأعداد الحقيقيّة: $v_0 = 1$، $v_1 = \sqrt{2}$، ...، $v_{2015} = \sqrt{2016}$، ....

تعريف 1

المتتاليةُ هي تابعٌ مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$. نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq 0}$ (عوضاً عن الرمز المتعارف للتابع $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$) ونسمّي u_n **حدَّ المتتالية ذا الدليل n**.

للمتتالية عددٌ لا نهائيّ من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود. فحدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ تأخذ فقط القيمتين $+1$ و -1.

كيف نعرّف متتالية؟

① بتعريف صريح للحدّ ذي الدليل n.

أي يُعرّف الحدُّ ذو الدليل n بصيغة تتبع العدد n تفيد في حسابه.

مثال كأن نكتب $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ فيكون مثلاً $u_9 = -\dfrac{1}{100}$، و $u_8 = \dfrac{1}{81}$. أو $v_n = \dfrac{3^n}{n+1}$ فنجد على سبيل المثال $v_2 = 3$.

مثال وكذلك إذا تأمّلنا مثلاً التابع $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 - 1$، أمكننا أن نُعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = f(n)$ فنجد مثلاً $u_{17} = 2\times 17^2 - 1 = 577$، وكذلك $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$.

② بالتدريج.

أي أن يُحسب الحدُّ ذو الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته. كأن نُعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بأن نُعطى الحدّ u_0 ثُمّ نعطى علاقة، **تسمّى علاقة تدريجيّة**، تفيد في حساب كلّ حدٍّ من حدود المتتالية بدلالة الحدّ أو الحدود التي سبقته.

مثال لنتأمّل مثلاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة انطلاقاً من حدّ البدء $u_0 = 5$ والعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = 3u_n - 2$، تسمح هذه المعطيات بحساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحداً إثر آخر.

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 13, u_2 = 3u_1 - 2 = 37, u_3 = 3u_2 - 2 = 109, \ldots$$

ونلاحظ في هذا المثال. يمكن التعبير عن الحدّ u_{n+1} تابعاً للحدّ u_n الذي سبقه أي $u_{n+1} = f(u_n)$، والتابع f هو التابع $x \mapsto 3x - 2$.

بوجه عام، إذا كان f تابعاً معرّفاً على مجال I، وتحقّق الشرط

مهما يكن العدد x من I يكن $f(x)$ عنصراً من I أيضاً

أمكننا تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، بإعطاء حدّ البدء u_0 من المجال I، والعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$.

فَكِّرْ

يمكن التعبير عن المتتالية في المثال السابق بصيغة من النمط $u_n = 3^n a + b$. عيّن العددين a و b.

تكريساً للفهم

كيف نفهم معنى الرمزين $(u_n)_{n\geq 0}$ و u_n ؟

المتتالية هي تابعٌ. جرت العادة أن نرمز إليه u، أو v، أو w بدلاً من f، أو g، أو h،.... فإذا رمزنا إليه بالرمز u رمزنا إلى صورة العدد x بالرمز $u(x)$، ولنتذكّر أنّ المتتاليات «تعمل» على الأعداد الطبيعيّة، نرمز إلى هذه الأعداد بالرّموز n ، m، i، j،... بدلاً من x. وهكذا تكون $u(n)$ هي صورة العدد الطبيعيّ n وفق المتتالية «التابع» u. وقد جرت العادة أن نكتب u_n للدلالة $u(n)$.

f	$f(x)$	$f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
u	u_n	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

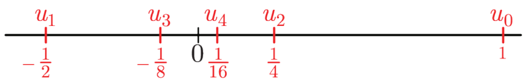
مثال

- قولنا إنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بالعلاقة $u_n = n^2 + 1$ يعني أننّا نقرن بكلّ عدد طبيعي n ناتج جمع مربّعه والواحد. فصورة 10 هي $u_{10} = 101$، وصورة $n+1$ هي $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1$ وصورة $3n$ هي $u_{3n} = (3n)^2 + 1$.
- قولنا إنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بالعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = 3u_n + 2$ يعني أنّه بمعرفة الحدّ الأوّل، يمكننا حساب أي حدّ بإضافة 2 إلى ثلاثة أمثال الحد الذي سبقه. فمثلاً

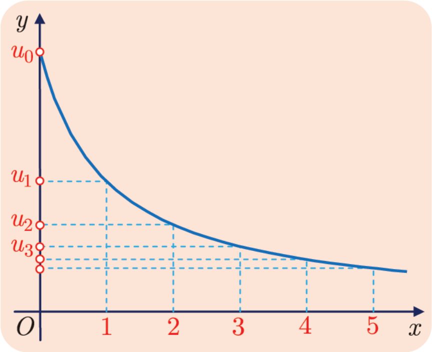
$$u_{15} = 3u_{14} + 2, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2, \quad u_{2n} = 3u_{2n-1} + 1$$

كيف نمثل الحدود الأولى لمتتالية؟

- بوجه عام، يكون التمثيل البياني للحدود المختلفة لمتتالية على محور أفقي معبِّراً. فمثلاً، في حالة $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ نجد التمثيل الآتي



- في حالة $u_n = f(n)$، يمكننا الاستفادة من التمثيل البياني للتابع $x \mapsto f(x)$. فمثلاً، في حالة المتتالية $u_n = \dfrac{4}{n+1}$، إذا تأمّلنا، على $\mathbb{R}_+$، التمثيل البيانيّ للتابع $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$ أمكننا قراءة الحدود الأولى للمتتالية على محور التراتيب.



قد لا يكفي إعطاء حدِّ البدء وعلاقة تدريجيّة لتعريف متتالية؟

إذ يمكن ألاّ يكون التابع f معرّفاً عند بعض قيم u_n، أي ألاّ ينتمي الحدّ u_n إلى مجموعة تعريف التابع f.

مثال

- في حالة $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$ مع $u_0 = 2$. نلاحظ أنّ $u_1 = 1$، ولكنّ الحدّ u_2 غير معرّف. فقيمة u_0 والعلاقة التدريجيّة السابقتين لا تعرّفان متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

▪ في حالة $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$ مع $u_0 = 5$. نجد $u_1 = 2$ و $u_2 = 1$، و $u_3 = 0$، ولكنّ الحدّ u_4 غير معرّف. إذن العلاقة التدريجيّة وقيمة u_0 السابقتين لا تعرّفان متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

تَدرَّبْ

① عيّن فيما يأتي التابع f الذي يُحقّق أيّاً كان n العلاقة $u_n = f(n)$ واحسب الحدود $u_0, \ldots, u_5$.

❶ $u_n = 2n + 5$ ❷ $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$ ❸ $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

❹ $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$ ❺ $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ ❻ $u_n = \sin\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بقيمة u_0 وبعلاقة تدريجيّة. عيّن فيما يأتي التابع f الذي يُحقّق أيّاً كان n العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ واحسب الحدود $u_1, \ldots, u_5$.

❶ $\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

❸ $\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ ❹ $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

③ فيما يأتي، المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بصيغة مباشرة للحدّ u_n بدلالة n. عبّر بدلالة n عن كلٍّ من u_{n+1} و u_{n-1} و u_{2n} و u_{2n+3} و $u_n + 1$ في الحالات الآتية :

❶ $u_n = 3n^2 - 1$ ❷ $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n + 1}$

❸ $u_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ ❹ $u_n = 1 - 2^{n-1}$

② المتتاليات المتزايدة، والمتتاليات المتناقصة

تعريف 2

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **متزايدة تماماً** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $0 \leq n$ يكن $u_n < u_{n+1}$.

ونقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **متناقصة تماماً** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $0 \leq n$ يكن $u_n > u_{n+1}$.

وتكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **متزايدة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $0 \leq n$ يكن $u_n \leq u_{n+1}$.

كما تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **متناقصة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $0 \leq n$ يكن $u_n \geq u_{n+1}$.

وأخيراً تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ **ثابتة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

مهما تكن $0 \leq n$ يكن $u_n = u_{n+1}$.

نطلق على المتتاليات التي تحقّق أحد الشروط السابقة اسم متتاليات مطّردة، ويبيِّن لنا مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$ أنّه توجد متتاليات غير مطّردة.

لدراسة اطّراد متتالية $(u_n)_{n\geq0}$، نقارن، أيّاً كان العدد الطبيعي n، العددين u_n و u_{n+1} وذلك بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$، أو بمقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ والعدد 1 في حال كون حدود المتتالية موجبة تماماً.

مثال

① في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = n^2 - n - 2$. نلاحظ

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - \left(n^2 - n - 2\right) = 2n$$

ولكن $2n > 0$ في حالة $1 \leq n$، نقول في مثل هذه الحالة إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً بدءاً من الدليل 1.

② في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \frac{2^n}{3^n}$. نلاحظ أنّ $0 < u_n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n، كما نجد مباشرة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3}$. ولكن $\frac{2}{3} < 1$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً.

حالة متتالية معرّفة بصيغة من الشكل $u_n = f(n)$.

مُبرهَنة 1

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $[0,+\infty[$. ولنتأمّل $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = f(n)$.

1. إذا كان f متزايداً تماماً كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.
2. إذا كان f متناقصاً تماماً كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الإثبات

1. ليكن $n \geq 0$، لمّا كان f متزايداً تماماً كان $f(n+1) > f(n)$ أو $u_n < u_{n+1}$.
2. ليكن $n \geq 0$، لمّا كان f متناقصاً تماماً كان $f(n+1) < f(n)$ أو $u_n > u_{n+1}$.

تبقى المبرهنة السابقة صحيحة إذا حذفنا كلمة «تماماً» منها.

إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بعلاقة تدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$، فإنّ اطّراد التابع f ليس مماثل لاطّراد المتتالية بالضرورة. وهذا ما سنراه في أمثلة لاحقة.

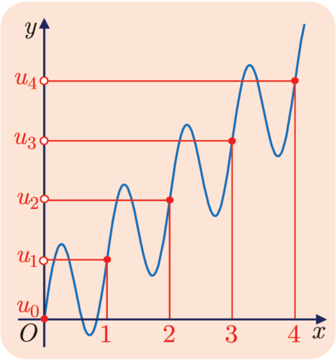
تكريساً للفهم

هل عكس المبرهنة 1 صحيح؟

لا، إذ يمكن أن نجد متتالية $u_n = f(n)$ متزايدة تماماً دون أن يكون f متزايداً تماماً. فإذا تأمّلنا التابع f المعرّف بالعلاقة

$$f(x) = x + \sin(2\pi x)$$

كان $u_n = f(n) = n$، فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً والتابع f ليس مطّرداً على $\mathbb{R}_+$، كما يبيّن الشكل المجاور.



كيف ندرس اطراد متتالية ؟

لدراسة اطّراد متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ يمكننا أن نتبع أحد الطرائق الآتية.

- دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.
- مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1، في حال كون حدود المتتالية موجبة تماماً.
- دراسة اطّراد التابع f، في حال كون المتتالية معرّفة بصيغة $u_n = f(n)$.

مثال

ادرس اطّراد المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ الآتيتين

① $u_n = \frac{n}{2^n}$ ② $v_n = \frac{3n-1}{n+2}$

الحل

① لندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{n+1-2n}{2^{n+1}}=\frac{1-n}{2^{n+1}}$$

ولكن أيّاً كان $1\le n$، كان $1-n\le 0$، ومن ثمّ $u_{n+1}-u_n\le 0$. فالمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة بدءاً من الدليل 1.

② لنتأمّل التابع الكسري f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$. هذا التابع معرّف بوجه خاص على المجال $[0,+\infty[$، وهو قابل للاشتقاق على هذا المجال.

أيّاً كان $0\le x$ فلدينا

$$f'(x)=\frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

إذن f' موجبٌ تماماً على المجال $[0,+\infty[$ فهو متزايدٌ تماماً على هذا المجال.

ولكن أيّاً كان العدد الطبيعي n كان $v_n=f(n)$، إذن $(v_n)_{n\ge 0}$ متتالية متزايدة تماماً.

يمكننا أيضاً لدراسة المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ اتّباع الطريقة الأولى، فنلاحظ

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{3n+2}{n+3}-\frac{3n-1}{n+2}\\&=\frac{(3n+2)(n+2)-(3n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}\\&=\frac{(3n^2+8n+4)-(3n^2+8n-3)}{(n+3)(n+2)}\\&=\frac{7}{(n+3)(n+2)}>0\end{aligned}$$

تَدرَّبْ

① ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ في الحالات الآتية.

❶ $u_n=\dfrac{3n-2}{n+1}$ ❷ $u_n=(n-5)^2$

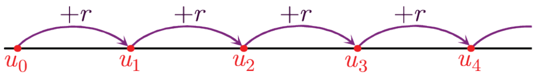
❸ $u_n=\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ ❹ $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n}, n\ge 1$

② لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n=n^2-10n+26$. احسب $u_{n+1}-u_n$، وبرهن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تصبح متزايدة بدءاً من الدليل $n=5$.

3 المتتاليات الحسابيّة

تعريف 3

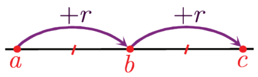
نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة إذا وُجِدَ عدد حقيقي r وتحقّقت العلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = u_n + r$ أيّاً كان العدد الطبيعي n. نسمّي العدد r **أساس** المتتالية الحسابيّة $(u_n)_{n\geq 0}$.
إذن في متتالية حسابيّة ننتقل من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي نفسه.



مثال

- متتالية الأعداد الطبيعيّة 0، 1، 2، 3، 4، ... هي متتالية حسابيّة حدّها الأوّل 0 وأساسها 1.
- متتالية الأعداد الزوجيّة 0، 2، 4، 6، 8، ... هي متتالية حسابيّة حدّها الأوّل 0 وأساسها 2.
- متتالية الأعداد الفرديّة 1، 3، 5، 7، 9، ... هي متتالية حسابيّة حدّها الأوّل 1 وأساسها 2.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 5n - 2$ هي متتالية حسابيّة أساسها 5 لأنّ
$u_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n - 2 + 5 = u_n + 5$.

إذا كانت الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة عندئذ يكون $b = \dfrac{a+c}{2}$، فالعدد b هو المتوسّط الحسابي للعددين a و c. وبالعكس نقول إنّ الأعداد a و b و c **تقع في متتالية حسابيّة إذا كان** $a + c = 2b$.



مُبرهَنة 2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة حدّها الأوّل u_0، وأساسها r. عندئذ مهما يكن العدد الطبيعيّ n يكن $u_n = nr + u_0$.

الإثبات

لمّا كانت المتتاليّة $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة، استنتجنا أنّ $u_1 = u_0 + r$، وهكذا، إذا افترضنا أنّ المساواة $u_n = nr + u_0$ محققّة في حالة العدد $n = p$، أي $u_p = pr + u_0$ استنتجنا من ذلك أنّ

$$u_{p+1} = u_p + r = (pr + u_0) + r = (p+1)r + u_0$$

فهي محقّقة أيضاً في حالة $n = p + 1$.

فمثلاً إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية الحسابيّة حدُّها الأوّل $u_0 = 3$ وأساسها $r = 4$ كان

$$u_{2015} = 4 \times 2015 + 3 = 8063$$

نسمي طريقة إثبات المبرهنة السابقة طريقة الإثبات **«بالتدريج»** أو **«بالاستقراء الرياضي»** وتنصّ على أنّه كي تتمكن من صعود السُلّم والوصول إلى أيّة درجة دليلها n يحقّق $n \geq n_0$، يكفي أن تتمكن من الصعود إلى الدّرجة القاعديّة التي دليلها n_0، وأن يكون بإمكانك الصعود من أية درجة دليلها $n = p$ إلى الدرجة التي دليلها $n = p + 1$ التي تعلوها مباشرة.

وبصياغة رياضيّاتية، لإثبات صحّة خاصّة $E(n)$ تتعلّق بالعدد الطبيعي n في حالة $n \geq n_0$.

① نثبت صحّة هذه الخاصّة في حالة $n = n_0$.

② نثبت في حالة $p \geq n_0$ أنّ صحّة $E(p)$ تقتضي صحّة $E(p+1)$.

تبيِّن المبرهنة الآتية العلاقة التي تربط حدّين من حدود متتالية حسابيّة.

نتيجة 3

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها r. عندئذ أيّاً كان العددان الطبيعيان n و m كان

$$u_n - u_m = (n - m)r$$

الإثبات

في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة السابقة، نجد $u_m = rm + u_0$ و $u_n = rn + u_0$، وعليه

$$u_n - u_m = (n - m)r$$

تكريساً للفهم

ما أهميّة العلاقة $u_n - u_m = (n - m)r$ ؟

- هذه العلاقة صحيحة بقطع النظر عن قيمة u_0.
- توافق حالة $m = 0$ نتيجة المبرهنة 2، وهي $u_n = nr + u_0$.
- من السهل تذكّر هذه العلاقة فالمقدار $u_n - u_m$ يساوي جداء ضرب الفرق $n - m$ بالأساس.
- تكفي معرفة الأساس وحدٍّ ما من حدود متتالية حسابيّة حتّى نستنتج جميع الحدود، فمثلاً إذا كان $u_8 = 29$ و $r = 3$ استنتجنا مثلاً أنّ

$$u_{17} = (17 - 8) \times r + u_8 = (17 - 8) \times 3 + 29 = 56$$

- تكفي معرفة حدّين من حدود متتالية حسابيّة حتّى نستنتج أساس المتتالية، ومن ثَمّ بقيّة الحدود. فمثلاً إذا كان $u_{16} = 12$ و $u_{31} = -18$ استنتجنا أنّ $r = -2$.

مثال كيف نثبتُ أنّ متتاليةً حسابيّةٌ ؟

أيُّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ الآتيتين حسابيّةٌ

① $u_n = 3n + 1$ ② $v_n = n^2 + 1$

لإثبات أنّ متتاليةً معطاة متتاليةٌ حسابيّة، يمكن أنّ نبرهن أنّ الفرق بين حدَّين متتاليين، لا على التعيين، ثابتٌ.

الحل

①نلاحظُ أوّلاً أنّ $u_0 = 1$، وأنّه أيّاً كانت قيمة العدد الطبيعي n كان

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة حدُّها الأوّل 1 وأساسها 3.

② أمّا في حالة المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ فنلاحظ

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 1 - \left(n^2 + 1\right) = 2n + 1$$

فالفرق $v_{n+1} - v_n$ ليس ثابتاً، والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ ليست متتالية حسابيّة.

ما أهميّة الإثبات بالتدريج؟

يفيد الإثبات بالتدريج في إثبات صحّة بعض الخواصّ المتعلّقة بالعدد الطبيعي n. لنوضّح هذا الأمر في المثال الآتي :

مثال نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً بالشرطين $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. نجد في الجدول المجاور القيم التقريبيّة للحدود التي أدلتها من المجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$ من هذه المتتالية.

n	u_n
0	1
1	1.732
2	1.932
3	1.983
4	1.996
5	1.999

- الملاحظة الأولى هي أنّ $u_{n+1} > u_n$ في حالة $n = 0,1,2,3,4$، فهل صحيح أنّ $u_{n+1} > u_n$ أيّاً كانت n؟ لنفترض أننا أثبتنا المتراجحة $u_{n+1} > u_n$، ونرغب بمقارنة الحدّين u_{n+2} و u_{n+1}، ولكنهمّا موجبان ويكفي من ثَمّ أن نقارن بين مربّعيهما لنجد:

$$u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = (2 + u_{n+1}) - (2 + u_n) = u_{n+1} - u_n > 0$$

ومن ثَمّ $u_{n+2} > u_{n+1}$. وهكذا نكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{n+1} > u_n$ أيّاً كان العدد n، فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

• الملاحظة الثانية هي أنّ $u_n < 2$ في حالة $n = 0,1,2,3,4$، فهل صحيح أنّ $u_n < 2$ أيّاً كانت n؟ لنفترض أننّا أثبتنا المتراجحة $u_n < 2$، ونرغب بمقارنة u_{n+1} بالعدد 2، ولكنّهما موجبان ويكفي من ثَمّ أن نقارن بين مربّعيهما لنجد:

$$2^2 - u_{n+1}^2 = 4 - (2 + u_n) = 2 - u_n > 0$$

ومن ثَمّ $u_{n+1} < 2$. وهكذا نكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_n < 2$ أيّاً كان العدد n.

تَدرَّبْ

① بيّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية حسابيّة.

❶ $u_n = 2n + 3$ ❷ $u_n = \dfrac{3n+1}{2}$

❸ $u_n = n^2 - n$ ❹ $u_{n+1} = -2 + u_n$

② فيما يأتي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية، أساسها r.

❶ $u_0 = 1$ و $u_{10} = 31$. احسب r و u_{2004}.

❷ $u_0 = 5$ و $u_{100} = -45$. احسب r و u_{20}.

❸ $u_{17} = 24$ و $u_{40} = 70$. احسب r و u_0.

❹ $u_{10\,000} = 1$ و $u_{2\,000} = -79$. احسب r و $u_{3\,857}$.

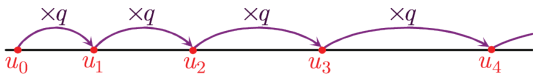
③ أثبت بالتدريج أنّ $2^n \geq n^2$ أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 4$.

④ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة في المثال السابق أثبت بالتدريج أنّ $2 - u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$ أيّاً كان العدد الطبيعيّ n.

4 المتتاليات الهندسيّة

تعريف 4

نقول إنّ المتتاليةَ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتاليةٌ هندسيّةٌ إذا وُجِدَ عدد حقيقي q وتحقّقت العلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = q \times u_n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n. نسمّي العدد q **أساس** المتتالية الهندسيّة $(u_n)_{n\geq 0}$. إذن في متتالية هندسيّة ننتقل من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي ذاته.



مثال

- متتالية قوى العدد 2 : 1، 2، 4، 8، 16، 32، ... هي متتالية هندسيّة حدّها الأوّل 1 وأساسها 2.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العامّ $u_n = (-1)^n$، متتالية هندسيّة حدّها الأوّل 1 وأساسها -1. أمّا حدودها فهي 1، -1، 1، -1، 1، -1، ....
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العامّ $u_n = 2 \times 3^n$، متتالية هندسيّة حدّها الأوّل 2 وأساسها 3. لأنّ $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = 3 \times u_n$.

إذا كانت الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة كان $b^2 = ac$، لأنّ $b = qa$ و $c = qb$ ومن ثَمّ $b^2 = qab = ac$. في حالة كون الأعداد a و b و c موجبة وتحقّق المساواة $b^2 = ac$. نقول إنّ b هو المتوسّط الهندسي للعددين a و c، والأعداد a و b و c **تقع في متتالية هندسيّة**.

مُبرهَنة 4

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة حدّها الأوّل u_0، وأساسها $q \neq 0$. عندئذ مهما يكن العدد الطبيعيّ n يكن $u_n = u_0 \times q^n$.

الإثبات

لمّا كانت المتتاليّة $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، استنتجنا أنّ $u_1 = u_0 \times q$. وإذا افترضنا أنّ $u_n = u_0 \times q^n$ صحيحة في حالة $n = m$ استنتجنا من ذلك أنّ

$$u_{m+1} = u_m \times q = \left(u_0 \times q^m\right) \times q = u_0 \times q^{m+1}$$

وعليه نستنتج أنّ $u_n = u_0 \times q^n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

مثال إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة حدُّها الأوّل $u_0 = 3$ وأساسها $r = \frac{1}{4}$ كان

$$u_5 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{3}{1024}$$

تُبيِّن المبرهنة الآتية العلاقة التي تربط حدّين من حدود متتالية هندسيّة.

مُبرهَنة 5

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة حدودها غير معدومة وأساسها q. عندئذ أيّاً كان العددان الطبيعيّان n و m كان $\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$.

الإثبات

في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة السابقة، نجد $u_n = u_0 q^n$ و $u_m = u_0 q^m$، وتنتج المساواة المطلوبة مباشرة.

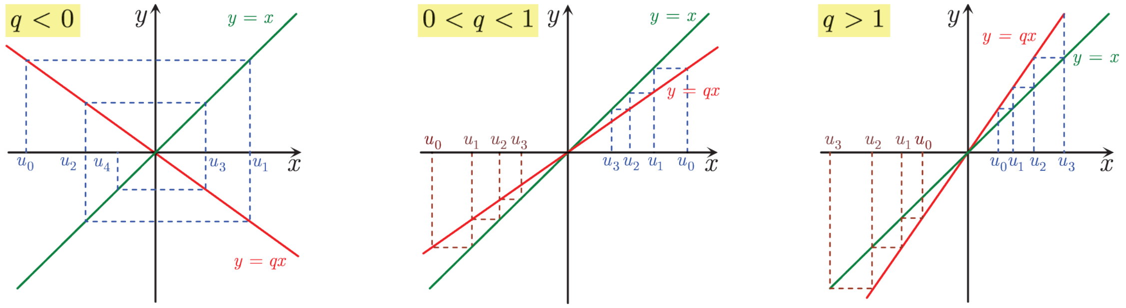
تفيد هذه النتيجة في حساب الحدّ ذي الدليل n من متتالية هندسيّة إذا عرفنا حدّاً منها وأساسها، أو بحساب الأساس إذا أُعطي حدّان اثنان منها.

تكريساً للفهم

كيف يمكننا تمثيل الحدود الأولى لمتتالية هندسيّة؟

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $q \neq 0$. إذن أيّاً كان n فلدينا $u_{n+1} = qu_n$. لنستفد من التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto qx$ للحصول على تمثيل بياني للمتتالية الهندسيّة $(u_n)_{n\geq 0}$.

يفيد المستقيم الذي معادلته $y = x$ بإرجاع الحدِّ u_n إلى محور الفواصل وهذا ما يسمح بحساب $u_{n+1} = f(u_n)$. نلاحظ من الرسم أدناه أنّ **جهة** اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تتعلّق بقيمة q وبإشارة u_0.



مثال كيف نثبتُ أنّ متتاليةً متتاليةٌ هندسيّةٌ ؟

① أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \frac{2}{3^n}$ هندسيّة.

② لتكن $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرّفة بالشرطين $v_0 = 6$ و $v_{n+1} = 3v_n + 4$. ولنعرّف المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $w_n = v_n + 2$. أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة.

لإثبات أنّ متتاليةً معطاة $(u_n)_{n\geq0}$ متتاليةٌ هندسيّة، نسعى لكتابتها بالصيغة $u_{n+1} = qu_n$ و q عددٌ لا يتعلّق بالعدد n. ولهذا يكفي أن نثبت، في حال كون جميع الحدود غير معدومة، أنّ النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ لا تتعلّق بالعدد n.

الحل

①نلاحظ أوّلاً أنّه مهما يكن n فالحدّ u_n مختلف عن الصفر. لنحسب إذن نسبة حدَّيْن متتاليين، فنجد $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3}$، وعليه تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{3}$.

② لمّا كان $w_n = v_n + 2$ أيّاً كان العدد الطبيعي n، كان $w_{n+1} = v_{n+1} + 2$، وإذا استبدلنا $3v_n + 4$ بالعدد v_{n+1} استنتجنا أنّ $w_{n+1} = 3v_n + 4 + 2 = 3w_n$. ولمّا كانت المساواة $w_{n+1} = 3w_n$ محقّقة أيّاً كانت قيمة العدد n، استنتجنا أنّ $(w_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة أساسها 3.

تَدرَّبْ

① بيِّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq0}$ الآتية هندسيّة.

❶ $u_n = 3^n + 3n$ ❷ $u_n = 5^{n+3}$ ❸ $u_0 = 2, u_{n+1} = 4u_n$

❹ $u_n = \frac{2}{5^{n+1}}$ ❺ $u_n = \frac{2n+5}{3}$ ❻ $u_0 = -1, 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

② فيما يأتي المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة، أساسها q.

❶ $u_0 = 4$ و $q = 5$. اكتب u_n بدلالة n.

❷ $u_4 = 8$ و $q = 2$. احسب u_2 و u_6.

❸ $u_5 = 64$ و $u_7 = 256$. احسب u_{10} (هناك جوابان).

③ إذا كان r عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً و n عدداً طبيعيّاً.

❶ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = 1 + rn$ حسابيّة.

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (1+r)^n$ هندسيّة.

❸ أثبت أنّ $(1+r)^n \geq 1 + rn$.

5 مجموع حدود متوالية لمتتالية

كثيراً ما نواجه مسألة حساب مجموع عددٍ من الحدود المتوالية لمتتالية معطاة $(u_n)_{n\geq 0}$. لنعبّر إذن بالصيغة الآتية عن مثل هذا المجموع

$$S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_j \quad \text{حيث} \quad i < j$$

أمّا النقاط الثلاث $\cdots$ في هذا المجموع فتعني أنّه علينا جمع الحدود التي تقع أدلّتها بين i و j.

إنّ عدد حدود المجموع $S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_j$ يساوي $j - i + 1$.

1.5. المتتاليات الحسابيّة

① **حالة خاصّة.** لنحسب مجموع أوّل n عدداً طبيعيّاً غير معدوم

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

لحساب هذا المجموع نتبع الطريقة التي تبعها الرياضيّاتي **غاوس** في التاسعة من عمره. فنكتب الحدود مرتبة تصاعديّاً من 1 إلى n، وفي سطر ثانٍ نعيد كتابة الحدود مرتبة تنازليّاً من n إلى 1

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

بالجمع نجد، $2S = n(n+1)$.

وعليه فإنّ مجموع أوّل n عدداً طبيعيّاً غير معدوم يساوي $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

② **الحالة العامّة.** لنحسب مجموع n من الحدود المتوالية في متتالية حسابيّة أساسها r. لنرمز بالرمز a إلى أوّل هذه الحدود وبالرمز ℓ إلى آخرها. عندئذ تكتب هذه الحدود بالشكل

$$a, a + r, a + 2r, \ldots, a + (n-1)r = \ell$$

وعليه

$$\begin{aligned} S &= a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + (a + (n-1)r) \\ &= na + r(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \end{aligned}$$

ولكن $\dfrac{(n-1)n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$، إذن

$$S = na + r\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(2a + (n-1)r) = n\frac{(a+\ell)}{2}$$

بذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية.

مُبرهَنة 6

إنّ مجموع عددٍ من الحدود المتوالية في متتالية حسابيّة يساوي جداءَ ضرب عدد الحدود بنصف مجموع الحدَّيْن الأول والأخير.

2.5. المتتاليات الهندسيّة

① **حالة خاصّة.** لنحسب مجموع أوّل n حدّاً من متتالية هندسيّة حدُّها الأوّل 1 وأساسها q في حالة $(q \neq 1)$ أي $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$.

في الحقيقة نلاحظ

$$\begin{array}{rcccccccccc} S = & 1 & + & \boxed{q} & + & \cdots & + & \boxed{q^{n-2}} & + & \boxed{q^{n-1}} & \\ qS = & & & \boxed{q} & + & \cdots & + & \boxed{q^{n-2}} & + & \boxed{q^{n-1}} & + \; q^n \end{array}$$

وبالطرح نجد، $(1-q)S = 1 - q^n$ ولكن $q - 1 \neq 0$ إذن $S = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

وعليه أيّاً كان العدد الحقيقي q، المختلف عن 1، كان

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

① **الحالة العامّة.** لنحسب مجموع n حدّاً متوالياً من متتالية هندسيّة أساسها q $(q \neq 1)$. نفترض أنّ أوّل هذه الحدود يساوي a، عندئذ تكتب بقيّة الحدود بالشكل aq، aq^2، ...، aq^{n-1}. وعليه

$$S = a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

وبذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية.

مُبرهَنة 7

مجموع n حدّاً متوالياً من متتالية هندسيّة أولها a، وأساسها q مختلف عن 1، يساوي $a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

تكريساً للفهم

كيف نتذكّر نتيجة المبرهنتين 6 و7؟

عندما تكون u_i، u_{i+1}، ....، u_j حدوداً متوالية من متتالية، يضمّ المجموع $S = u_i + \cdots + u_j$، $j - i + 1$ حدّاً ولدينا

● إذا كانت المتتالية حسابيّة كان لدينا، عملاً بالمبرهنة 6، ما يأتي $S = (\text{عدد الحدود}) \times \dfrac{\text{أوّل حدّ} + \text{آخر حدّ}}{2}$	● إذا كانت المتتالية هندسيّة كان لدينا، عملاً بالمبرهنة 7، ما يأتي $S = (\text{أوّل حدّ}) \times \dfrac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

مثال الاستفادة من المبرهنة 6.

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتاليةً حسابيّة فيها $u_0 = 2$ وأساسها $r = 5$. نعرّف $S_n = u_3 + \cdots + u_n$ فإذا علمتَ أنّ $S_n = 6\,456$، احسب قيمة n.

الحل

للمجموع S_n الصيغة $u_i + \cdots + u_j$ حيث $i = 3$ و $j = n$ فهو يضمّ $n - 2$ حدّاً. إذن $S_n = (n-2) \times \frac{u_3 + u_n}{2}$. ولكن لدينا، استناداً إلى المبرهنة 2،

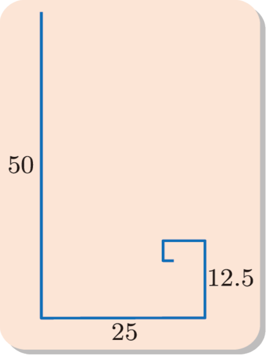
$$u_n = u_0 + nr \quad \text{و} \quad u_3 = u_0 + 3r$$

أو $u_3 = 17$ و $u_n = 2 + 5n$. نستنتج إذن أنّ $S_n = (n-2)\left(\frac{5n+19}{2}\right)$. ونعلم أنّ n عددٌ طبيعي وأنّ $S_n = 6\,456$. وهذا يُكافئ الشّرطين :

① العدد n عددٌ طبيعي. ② $5n^2 + 9n - 12\,950 = 0$.

وبحلّ هذه المعادلة آخذين بعين الاعتبار الشّرط المعطى نجد $n = 50$.

مثال بالاستعانة بخيط طوله $100\,\text{cm}$، ننشئ الشكل المجاور. طول كلّ قطعة مستقيمة يساوي نصف طول القطعة التي سبقتها. نضع طول القطعة الأولى $u_0 = 50\,\text{cm}$، ونرمز بالرمز u_1 إلى طول القطعة الثانية وهكذا. نفترض أنّه تمكن متابعة هذا الإنشاء إلى ما لانهاية، فنحصل بذلك على متتالية $(u_n)_{n\geq0}$. احسب $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. هل يكفي الخيط لمتابعة الإنشاء دون توقّف؟



الحل طول كلّ قطعة مستقيمة يساوي نصف طول القطعة التي سبقتها. إذن $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$، والمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة فيها $u_0 = 50$ وأساسها $\frac{1}{2}$. وعليه نجد $S_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ أو $S_n = 100\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. ونلاحظ أنّه مهما تكن n فلدينا $S_n < 100$ لأنّ $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$، وعليه يمكننا الإجابة بالإيجاب عن السؤال المطروح.

تَدرَّبْ

① المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابيّة فيها $u_{10} = -12$ و $u_{20} = -32$.

1. احسب u_0 و r.
2. احسب المجموع $S = u_{10} + u_{20} + u_{30} + \cdots + u_{100}$.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسيّة، فيها $q = 3$ و $u_4 = 12$. احسب المجموع الآتي

$u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$.

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابيّة. نعرّف $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. احسب u_1 و S_n إذا علمتَ أنّ $u_n = 105$ و $n = 17$ و $r = -2$.

6 تقارب متتالية

1.6 دراسة تقارب متتالية

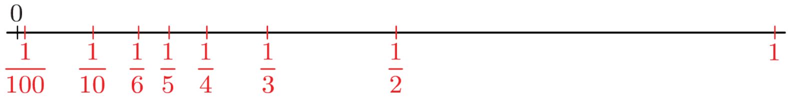
دراسة تقارب متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، هو الإجابة عن التساؤل حول ما تؤول إليه الأعداد u_n عندما يأخذ الدليل n قيماً أكبر فأكبر «**في جوار اللّانهاية**». عند دراسة متتالية نهتمّ إذن بالنقاط الآتية.

- أتتناثر الأعداد u_n عندما تزداد قيم الدليل كِبراً؟ أتزداد قيم الأعداد u_n، أو $|u_n|$، دون حدود عندما تزداد أكثر فأكثر قيم الدليل؟
- أتتجمّع قيم الأعداد u_n عند قيمة ثابتة ℓ عندما تزداد قيم الدليل كِبراً ؟

مثال لنكتب قائمة بحدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{1}{n+1}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^6}, \ldots, \frac{1}{10^{20}}, \ldots, \frac{1}{10^{100}}, \ldots$$

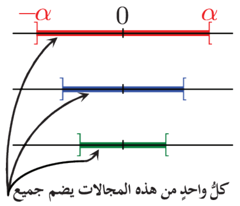
من الواضح أنّ الحدود تتجمّع عند العدد 0.



كيف نعبّر بدقّة عن فكرة تجمّع حدود المتتالية عند قيمة؟

حدسيّاً، يمكننا القول إنّ الحدود تصبح قريبة جدّاً من الصفر، أو إنّها تصبح أقرب فأقرب من الصفر. ولكن هذه الصياغةَ صياغةٌ غير دقيقة، فما المعنى الدقيق لقولنا «قريبة جداً» أو قولنا «أقرب فأقرب»؟ لإعطاء معنى دقيقاً للقول « u_n قريبة من 0 »، يجب أن نقول « u_n تبعد عن 0 مسافة لا تزيد عن α »، (α عددٌ حقيقي، $0 < \alpha$)، أي إنّ u_n تقع داخل المجال $I =]-\alpha, \alpha[$ الذي مركزه 0 ونصف قطره α.

لنأخذ مثلاً حالة $\alpha = 0.00001 = 10^{-5}$، عندئذ نلاحظ أنّ المجال I يضمّ جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تقريباً، وبدقّة أكثر إنّه يضم جميع حدود المتتالية التي يزيد دليلها على 10^5.



وأكثر من ذلك، هناك تجمّع عند 0، لأنّ ما قيل في حالة $\alpha = 10^{-5}$ صحيح في حالة قيمة كيفيّة موجبة تماماً للعدد α، ومهما كانت هذه القيمة صغيرة. فكلُّ مجال مفتوح مركزه 0 يضمّ جميع حدود المتتالية باستثناء عددٍ منته منها على الأكثر. فكلّ واحد من هذه المجالات يؤدّي دور فخٍ يمكّننا من اصطياد جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن.

نقول في مثل هذه الحالة إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تقبل العدد 0 نهاية لها عندما «يسعى» n إلى اللّانهاية.

تعريف 5

نقول إنّ عدداً حقيقيّاً ℓ هو نهاية للمتتاليةِ $(u_n)_{n\geq 0}$ إذا ضمّ كلُّ مجال مفتوح مركزه ℓ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن (أو باستثناء عدد منته منها).

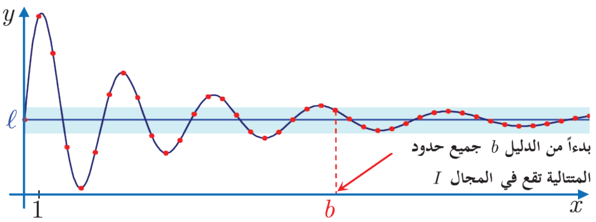
نكتب في مثل هذه الحالة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ، ونقول إنّ المتتالية متقاربة أو إنها تتقارب من ℓ.

2.6. نهاية متتالية معرّفة بصيغة من الشكل $u_n = f(n)$

مُبرهَنة 8

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $[a,+\infty[$، ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة بالعلاقة $u_n = f(n)$ في حالة $a \leq n$، وتأخذ حدودها قيماً كيفيّة في حالة $n < a$. إذا كان للتابع f نهاية ℓ عند $+\infty$ كان للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية ℓ عند $+\infty$.

حدسيّاً، لمّا كانت ℓ نهاية f عند $+\infty$، فعندما يأخذ المتحوّل x قيماً أكبر فأكبر نحو $+\infty$ (في مجال من النمط $[b,+\infty[$ مثلاً)، تتجمّع الأعداد $f(x)$ عند ℓ. وتكون هذه هي حال الأعداد $u_n = f(n)$، لأنّه عندما تتحوّل x في المجال $[b,+\infty[$ فهي تأخذ بالضرورة جميع الأعداد الطبيعيّة في هذا المجال.



تقبل التوابع المرجعيّة $x \mapsto \frac{a}{x}$ ، $x \mapsto \frac{a}{x^2}$ ، $x \mapsto \frac{a}{x^3}$ ، ... ، $x \mapsto \frac{a}{\sqrt{x}}$ ، (حيث a عددٌ حقيقي) الصفر نهاية لها عندما تسعى x إلى $+\infty$. نستنتج إذن ما يأتي:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n^m} = 0$ (حيث m عدد طبيعي أكبر من 2) و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$

3.6. التقارب والعمليات الجبريّة

مُبرهَنة 9

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد a، ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد b. عندئذ يتحقّق ما يأتي.

1. المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $s_n = u_n + v_n$، متقاربة من العدد $a+b$.
2. المتتالية $(p_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $p_n = u_n \times v_n$، متقاربة من العدد $a\times b$.
3. وإذا كانت جميع حدود المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ مختلفة عن الصفر و $b\neq 0$، كانت المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $t_n = \dfrac{u_n}{v_n}$، متقاربة من العدد $\dfrac{a}{b}$.

مثال

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة الآتية $u_n = \dfrac{n+1}{n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ تتقارب من 0.
  لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ تتقارب من 2.
  لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$.

مُبرهَنة 10. مبرهنة المتتاليات الثلاث

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ ثلاث متتاليات. نفترض أنّه مهما يكن العدد الطبيعي $n \geq n_0$ فلدينا $w_n \leq u_n \leq v_n$. عندئذ إذا كانت المتتاليتان $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين من النهاية ℓ نفسها، كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من ℓ أيضاً.

الإثبات

ليكن I مجالاً مفتوحاً مركزه ℓ. المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من ℓ. إذن، استناداً إلى التعريف، يوجد دليلٌ n_1 بدءاً منه تقع جميع حدود المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ في المجال I. وبالمثل يوجد دليلٌ n_2 بدءاً منه تقع جميع حدود المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ في المجال I.

لنعرّف إذن n_0 بأنّه أكبر العددين n_1 و n_2. فإذا كان $n \geq n_0$، كان $n \geq n_1$ وانتمى الحدُّ v_n إلى المجال I، وكان أيضاً $n \geq n_2$ وانتمى الحدُّ w_n إلى المجال I. ولكنّ الحدَّ u_n يقع بين v_n و w_n اللذين ينتميان إلى المجال I، إذن u_n يقع أيضاً في المجال I. بذا نكون قد أثبتنا أنّ المجال I يضم جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بدءاً من الحدّ n_0.

1. مفهوم النهاية اللّانهائيّة

حدسيّاً، أنْ نقولَ إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $+\infty$، يعني أنّ حدودها، باستثناء عدد منته منها، تتجاوز أيّ قيمة موجبة m نختارها مهما كانت كبيرة. أي بدءاً من دليل معيّن، تكون جميع حدود المتتالية أكبر من m.

تعريف 6

نقول إنّ المتتاليةَ $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا ضمّ كلُّ مجال من النمط $]m,+\infty[$، جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن. ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

وبأسلوب مماثل نقول إنّ المتتاليةَ $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $-\infty$ إذا ضمّ كلُّ مجال من النمط $]-\infty,m[$، جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن. ونكتب عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = n^2$ تسعى إلى $+\infty$. لأنّه أيّاً كان n كان $1 < n$ $n^2 > n$. وكذلك تسعى المتتاليتان $v_n = \sqrt{n}$ و $w_n = n^3$ إلى $+\infty$.

2. نهاية متتالية هندسيّة

لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة تُحقّق $v_n = v_0 \times q^n$. إذن، استناداً إلى المبرهنة 9، يكفي أن ندرس المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = q^n$.

مُبرهَنة 11

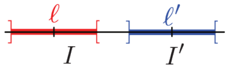
- في حالة $-1 < q < 1$ يكون لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
- في حالة $q = 1$ يكون لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.
- في حالة $q > 1$ يكون لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. أي تتجاوز الحدود q^n أيّ عدد، مهما كان كبيراً، بدءاً من قيمة معيّنة للدليل n.

مثال المتتالية الهندسيّة $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ تسعى إلى 0. لأنّ $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

تكريساً للفهم

هل يمكن أن تكون لمتتالية نهايتان ؟

لا. لنفترض أنّ للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهايتين مختلفتين ℓ و ℓ'. لنختر مجالين منفصلين I و I' مركز أوّلهما ℓ، ومركز الثانيّ ℓ'.

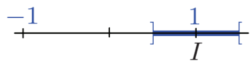


لمّا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تقبل ℓ نهاية لها، استنتجنا أنّ المجال I يضمّ جميع حدود المتتالية ما عدا عدداً منتهياً من حدودها. إذن لا يوجد خارج المجال I إلاّ عددٌ منته من حدود المتتالية، ومن ثَمّ لا يمكن أن يضمَّ المجال I' عدداً غير منته من حدود المتتالية، ولا يمكن أن يكون العدد ℓ' نهاية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

تسمّى المُحاكمةُ المنطقيّة في البرهان السابق برهاناً بالخُلْف، أو بنقض الفرْض.

ألِكُلِّ متتالية نهاية ؟

لا. لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (-1)^n$. إنّ حدود هذه المتتالية هي : 1، -1، 1، -1، 1، -1، 1، -1،....

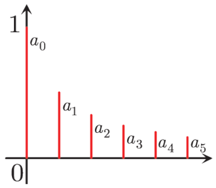


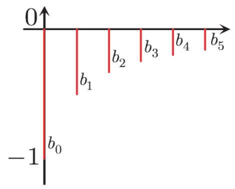
المجال $I = \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ الذي مركزه 1 يضم عدداً لا نهائيّاً من حدود المتتالية، (جميع الحدود ذات الدليل الزوجي)، ولكنّه يترك خارجه أيضاً عدداً غير منته من الحدود، هي الحدود ذات الدليل الفردي. والأمر نفسه يتكرّر في المجال $\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$ الذي مركزه -1. فحدود هذه المتتالية لا تتجمّع عند نقطة واحدة. وليس لهذه المتتالية نهاية.

لماذا نقول إنّه توجد طرائق مختلفة للتقارب من النهاية نفسها ؟

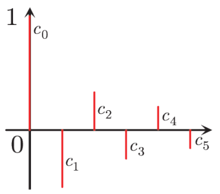
لنتأمّل على سبيل المثال المتتاليات $(a_n)_{n\geq 0}$، $(b_n)_{n\geq 0}$، $(c_n)_{n\geq 0}$، $(d_n)_{n\geq 0}$ الآتية، والتي تقبل جميعاً الصفر نهاية لها.

- $a_n = \dfrac{1}{n+1}$، التي حدودها الأولى 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$،.... نلاحظ أنّ حدود المتتالية موجبة تماماً وأنّ المتتالية متناقصة تماماً.

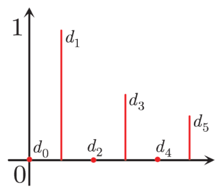




▫ $b_n = -\dfrac{1}{n+1}$، التي حدودها الأولى -1، $-\dfrac{1}{2}$، $-\dfrac{1}{3}$، $-\dfrac{1}{4}$، $-\dfrac{1}{5}$، .... نلاحظ أنّ حدود المتتالية سالبة تماماً وأنّ المتتالية متزايدة تماماً.



▫ $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$، التي حدودها الأولى 1، $-\dfrac{1}{2}$، $\dfrac{1}{3}$، $-\dfrac{1}{4}$، $\dfrac{1}{5}$، .... نلاحظ أنّ حدود المتتالية تتوزّع على جانبي العدد 0 وأنّ المتتالية غير مطّردة.



▫ $d_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n+1}$، التي حدودها الأولى 0، 1، 0، $\dfrac{1}{2}$، 0، $\dfrac{1}{3}$، 0، $\dfrac{1}{4}$، 0، .... نلاحظ أنّ حدود المتتالية موجبة أو معدومة، وأنّ $d_n = 0$ كلّما كان الدليل n زوجيّاً. فحدود المتتالية تأخذ قيمة النهاية (عدداً غير منتهٍ من المرات) بعكس الحالات السّابقة.

لماذا نستعمل المبرهنات على النهايات؟

لأنّ إثبات كون عدد ℓ نهاية لمتتالية اعتماداً على التعريف عسيرٌ بوجه عام. في الحقيقة، ينبغي أن نبرهن أنّ كل مجال مفتوح مركزه ℓ يضم جميع حدود المتتالية بدءاً من دليلٍ معيّن. وهذا يعني أنّه مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماماً α، يضمُّ المجال $]\ell-\alpha, \ell+\alpha[$ الذي مركزه ℓ ونصف قطره α جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن. وهذا بدوره يؤول إلى إثبات أنّ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن تحقّق المتراجحة $|u_n - \ell| < \alpha$. إنّ حل مثل هذه المتراجحات أمرٌ عسير بوجه عام.

وعليه فإنّ المبرهنات على النهايات تفيدنا في استنتاج نهايات جديدة انطلاقاً من نهايات معروفة دون اللّجوء إلى التعريف.

كيف نستفيد من المبرهنة 8 ؟ حالة التوابع الكسريّة

درسنا في الوحدة الرابعة كيف نجد نهاية تابع كسري F عند $+\infty$. يمكننا إذن استنتاج تقارب المتتالية $u_n = F(n)$.

مثال لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$. هذه متتالية من النمط $u_n = f(n)$، و f هو التابعُ الكسري المعرّف بالصيغة $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+5}$.

لمّا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ استنتجنا، بناءً على المبرهنة 8، أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

مثال كيف نستفيد من المبرهنات على النهايات ؟

ادرس نهاية المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ الآتيتين.

① $u_n = \frac{3n+1}{n} + \frac{5}{n^2}$ ② $v_n = \frac{2n+1}{3n\sqrt{n}}$

الحل

① نلاحظ أنّ $u_n = 3 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}$، ولكن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 0$ ، إذن، استناداً إلى المبرهنة 9 نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

② نلاحظ أنّ $v_n = r_n \times s_n$ مع $r_n = \frac{2n+1}{3n}$ و $s_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- من جهة أولى، نرى أنّ $r_n = f(n)$، و f هو التابع الكسري $f : x \mapsto \frac{2x+1}{3x}$. إذن، اعتماداً على المبرهنة 8، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{2}{3}$.
- ومن جهة ثانية لدينا $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

إذن، استناداً إلى المبرهنة 9، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \times \frac{2}{3} = 0$.

لماذا، في مبرهنة المتتاليات الثلاث، ينبغي أن يكون للمتتاليتين $(v_n)_{n\geq0}$ و $(w_n)_{n\geq0}$ النهاية نفسها ؟

لأنّه يمكن حصر متتالية بين متتاليتين متقاربتين دون أن تكون متقاربة. لنتأمّل مثلاً المتتاليات $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ و $(w_n)_{n\geq0}$ المعرّفات بالعلاقات $u_n = (-1)^n$، و $v_n = -1$ و $w_n = 1$. من الواضح أنّ $v_n \leq u_n \leq w_n$ أيّاً كانت قيمة الدليل n، كما إنّه من الواضح أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n = -1$ و $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$ ، ولكن ليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ نهاية كما رأينا.

كيف نستفيد بأسلوب آخر من مبرهنة المتتاليات الثلاث؟

- لنفترض أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تُحقّق، أيّاً كان $n > 100$، المتراجحة $|u_n - 2| \leq \frac{2}{n}$، عندئذ يمكننا أن نستنتج $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$. في الحقيقة. أيّاً كانت $n > 100$ فلدينا $2 - \frac{2}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n}$. ولكن $\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2$ و $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{n}\right) = 2$ إذن $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.
- بوجه عام، إذا علمنا أنّ متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تُحقّق، أيّاً كانت $n > n_0$، المتراجحة $|u_n - \ell| \leq v_n$، وأنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ تتقارب من 0، عندئذ يمكننا أن نستنتج $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

تأمّل الحالة الخاصّة المهمّة التي يكون فيها $\ell = 0$.

مثال كيف نستفيد من مبرهنة المتتاليات الثلاث؟

ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $u_n=\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ ② $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{2n}$ ③ $u_n=\dfrac{2n-\cos n}{3n+1}$

لدراسة تقارب متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ عندما لا تسعفنا المبرهنة 8 أو المبرهنة 9، يمكننا أن نفكّر بحصرها بين متتاليتين لهما النهاية ذاتها.

الحل

① أيّاً كان $1\leq n$ فلدينا $-1\leq \sin n\leq 1$ و $\sqrt{n}>0$، إذن $-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ولكنّ المتتاليتين $v_n=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ و $w_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ متقاربتان من 0. إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}=0$.

② في هذه الحالة، مهما تكن $1\leq n$ فلدينا $\dfrac{n-1}{2n}\leq u_n\leq\dfrac{n+1}{2n}$، لأنّ $(-1)^n\leq 1$ و $-1\leq(-1)^n$. ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$.

③ هنا لدينا $\dfrac{2n-1}{3n+1}\leq u_n\leq\dfrac{2n+1}{3n+1}$، لأنّه مهما تكن $1\leq n$، فلدينا $\cos n\leq 1$ و $-1\leq\cos n$. ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$، نستنتج إذن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{2}{3}$.

تَدرَّبْ

① أوجد، عند التقارب، نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في الحالات الآتية مبرِّراً الإجابة.

① $u_n=\dfrac{5}{n^4}$ ② $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}+3$ ③ $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

② أوجد، عند التقارب، نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في الحالات الآتية.

① $u_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$ ② $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ ③ $u_n=\dfrac{n+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}$

③ ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ في الحالات الآتية.

① $u_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ② $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{n}{n^2+1}$

③ $u_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ④ $u_n=\dfrac{n+1}{5n-1}$

أفكار يجب تَمثُّلها

- المتتالية هي تابعٌ معرّف عند الأعداد الطبيعيّة بدلاً من المجالات في $\mathbb{R}$. المتحوّل هنا هو عددٌ طبيعي، وصورة العدد n وفق المتتالية u هي u_n بدلاً من $u(n)$. والمتتالية نفسها نرمز إليها بالرمز $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلاً من u.

- نميِّز نوعين من المتتاليات.

❶ تلك التي يمكننا فيها مباشرةً حساب أيّ حدٍّ u_n انطلاقاً من الدليل n. وهي تشمل جميع المتتاليات من النمط $u_n = f(n)$ و f تابعٌ مألوف.

مثال

أيّاً كان n، $u_n = 2n^2 - n + 1$. عندئذ $u_7 = 92$.

❷ تلك التي لحساب حدٍّ من حدودها ينبغي معرفة جميع الحدود السابقة. وهي تشمل المتتاليات المعرّفة انطلاقاً من الحدِّ الأوّل u_0 ومن علاقة تدريجيّة: مهما كان العدد الطبيعي n، كان $u_{n+1} = f(u_n)$.

مثال $u_0 = \sqrt{2}$ وأيّاً كان n، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

- في حالة متتالية حسابيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ننتقل من حدٍّ إلى الذي يليه بإضافة العدد r نفسه، الذي نسميّه أساس المتتالية $u_{n+1} = u_n + r$.

ويرتبطُ حدّان كيفيّان u_n و u_m بالعلاقة $u_n - u_m = (n-m)r$.

أمّا مجموع الحدود u_n، u_{n+1}، u_{n+2}، ...، u_m فيساوي $S = (m - n + 1) \times \dfrac{u_n + u_m}{2}$

- في حالة متتالية هندسيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ننتقل من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه بضربه بالعدد غير المعدوم q نفسه، الذي نسميّه أساس المتتالية: $u_{n+1} = u_n \times q$.

ويرتبطُ حدّان كيفيّان u_n و u_m بالعلاقة $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

أمّا مجموع الحدود u_n، u_{n+1}، u_{n+2}، ...، u_m في حالة $q \neq 1$، فيساوي $S = u_n \times \dfrac{1 - q^{m-n+1}}{1-q}$.

منعكسات يجب امتلاكُها.

- لإثبات أنّ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية حسابيّة، فكِّر بإثبات أنّ الفرق $u_{n+1}-u_n$ ثابتٌ لا يتعلّق بالدليل n. إنّه أساس المتتالية.
- لإثبات أنّ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسيّة، حاول إظهار عبارة u_n ضمن صيغة u_{n+1} سعياً وراء العلاقة $u_{n+1}=q\times u_n$، فإذا تمكّنت من ذلك وكان q مقداراً ثابتاً لا يتعلّق بالدليل n. تكون قد أثبتَّ المطلوب وأوجدتَ أساس المتتالية الهندسيّة.
- لدراسة جهة اطّراد متتالية تمكن الاستفادة من عدد من الأدوات.
  - ادرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.
  - في حالة كون حدود المتتالية موجبة تماماً، قارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1.
  - إذا كانت المتتالية من النمط $u_n=f(n)$، ادرس اطراد التابع f، لأنّه إذا كان f مطّرداً كان للمتتالية جهة اطّراد التابع f نفسها.
- لإيجاد نهاية متتالية.
  - فكِّر باستعمال المتتاليات المرجعيّة $\frac{1}{n}$، $\frac{1}{n^2}$، $\frac{1}{n^3}$، $\frac{1}{\sqrt{n}}$ وأنّ نهاية مجموع أو جداء ضرب أو خارج قسمة هي على التوالي مجموع أو جداء ضرب أو خارج قسمة النهايات (ضمن بعض الشروط).
  - فكِّر بإيجاد تابع f يُحقّق $u_n=f(n)$، لأنّه إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$ كان $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$.
  - فكِّر أيضاً باستعمال مبرهنة المتتاليات الثلاث : احصر u_n بين v_n و w_n على أن يكون للمتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ النهاية نفسها.

أنشطة

المتتاليات المعرّفة بالتدريج

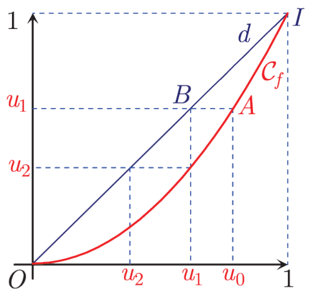
نشاط 1 حالة التابع $x \mapsto x^2$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي :

$u_0 = \dfrac{3}{4}$ ، وأيّاً كان n ، كان $u_{n+1} = u_n^2$.

① أثبت أنّه أيّاً كان x من المجال $]0,1[$ كان $0 < x^2 < x < 1$.

② ارسم في مستوٍ مزوّدٍ بمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (خذ 10 cm واحدة الطول) الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع $f : x \mapsto x^2$ ، ثمّ ارسم المستقيم d الذي معادلته $y = x$. يقطع المستقيم d المنحني $\mathcal{C}_f$ في النقطتين O و I . أوجد إحداثيّي النقطة I .



③ ❶ عيّن النقطة A من $\mathcal{C}_f$ التي فاصلتها u_0 . يقطع المستقيمُ المارّ بالنقطة A موازياً محور الفواصل المستقيمَ d بنقطة B . لماذا تكون u_1 فاصلةَ B ؟

❷ عيّن النقطة من $\mathcal{C}_f$ التي فاصلتها u_2 ، ثمّ كرّر الإنشاء لتجد الحدود الأولى من المتتالية.

④ أيُفيدك هذا التمثيل البياني في التنبّؤ بجهة اطّراد المتتالية؟ وبنهايتها المحتملة؟

⑤ نقبل أنّ هذه المتتالية تتقارب من 0 . بالاستفادة من السؤال ① أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً. قارن جهة اطّراد التابع f وجهة اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

بوجه عام، لتمثيل الحدود الأولى لمتتالية تدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$ نرسم المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ والمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم نعيّن u_0 على محور الفواصل، ونتابع الإنشاء كما سبق.

نشاط 2 حالة التابع التآلفي $x \mapsto ax + b$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة بالشرط $u_0 = 1$ ، وأيّاً كان n ، كان $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$.

① احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 .

② ما هو التابع f الذي يُحقّق $u_{n+1} = f(u_n)$ أيّاً كانت قيمة n .

③ اتبع طريقة الفقرة السابقة لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. أيفيدك هذا التمثيل في التنبّؤ بجهة اطراد المتتالية؟ وبنهايتها المحتملة؟

④ ❶ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = u_n - 2$ متتالية هندسيّة.

❷ عبّر عن v_n بدلالة n. ثُمّ استنتج نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ ونهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

نشاط 3 الحالة العامّة للتابع التآلفي $x \mapsto ax+b$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي : $u_0 = c$، و $u_{n+1} = au_n + b$ أيّاً كان n. مع $a \neq 1$.

① أثبت أنّ للمعادلة $x = ax + b$ حلٌّ وحيد نرمز إليه بالرمز λ، احسبه بدلالة a و b.

② نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = u_n - \lambda$.

❶ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

❷ احسب v_n بدلالة n.

❸ أثبت تقارب المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ في حالة $-1 < a < 1$، ما نهايتها في هذه الحالة.

③ نفترض أنّ $-1 < a < 1$. أثبت تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، واحسب نهايتها بدلالة a و b و c.

④ احسب u_n بدلالة a و b و c و n.

تمرينات ومسائل

1 ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية.

① $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ ② $u_0 = 2,\quad u_{n+1} = u_n - n$

③ $u_n = n + (-1)^n$ ④ $u_n = \dfrac{2^n}{n},\quad n \geq 1$

2 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$.

1. ادرس اطّراد التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 54x$.
2. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة بدءاً من الدليل $n = 9$.

3 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها r. عيّن جهة اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة إشارة r.

4 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشرطين $u_0 = 1$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

1. احسب الحدود u_1، u_2، ....، u_5.
2. في حالة $u_n \neq 0$ نعرّف $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. احسب الحدود v_0، v_1، ....، v_5.
3. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة، ثُمّ عبّر عن u_n بدلالة n.

5 أعد السؤال السابق في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي.

$u_0 = \dfrac{1}{5}$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 2u_n}$.

6 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشرطين :

$u_0 = 2$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. احسب الحدود u_1، u_2، ....، u_5.
2. نعرّف $v_n = u_n + 5$. احسب الحدود v_0، v_1، ....، v_5.
3. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، ثُمّ عبّر عن u_n بدلالة n.

7 أعد السّؤال السابق في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي:

$u_0 = 3$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$ ، و $v_n = 3u_n - 2$.

8 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة فيها

$u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_{10} + u_{11} = 40$.

1. احسب u_0 و r .
2. احسب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{30}$.

9 أثبت أنّ المجموع $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$ هو مربّع عدد طبيعيّ. بوجه عامّ، احسب بدلالة n، مجموع أول n عدد طبيعيّ فردي

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة. نعرّف $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

1. احسب u_1 و u_n إذا علمتَ أنّ $r = -7$ و $n = 33$ و $S_n = 0$.
2. احسب u_1 و n إذا علمتَ أنّ $u_n = 14$ و $r = 7$ و $S_n = -1176$.

11 احسب المجاميع الآتية.

$$S_a = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1\,048\,576}$$

$$S_b = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \cdots - \frac{1}{6\,561}$$

$$S_c = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^7}$$

12 لنتأمّل متتاليتين حسابيّتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وعددين حقيقيين b و a . نعرّف

$$t_n = au_n + bv_n$$

أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة.

لنتعلّم البحث معاً

13 متتالية حسابيّة

تكوّن الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة. نفترض أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي 21 وأنّ مجموع مربّعاتها يساوي 197. عيّن هذه الأعداد.

نحو الحلّ

لنترجم الخاصّة المشار إليها في نص السؤال، فنحصل على معادلتين بثلاثة مجاهيل هما

$$a + b + c = 21 \quad \text{و} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 197$$

في حالة ثلاثة مجاهيل نفضّل بوجه عام أنّ يكون لدينا ثلاث معادلات. وهنا نتذكّر أنّ الأعداد a و b و c تكوّن ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة. ولكن عندما نعرف حدَّيْن في متتالية حسابيّة، أو حدّاً واحداً وأساس المتتالية، فإننّا نعرف جميع حدود المتتالية. إذن يمكننا إرجاع المسألة إلى مجهولين: إمّا حدَّان أو حدٌّ واحد وأساس المتتالية.

☝ لنختر الحدَّيْن a و c مجهولَيْ مسألتنا، عندئذ يمكننا التعبير عن كون الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة بالعلاقة $b = \dfrac{a+c}{2}$.

1. اكتب جملة معادلات تفيد في حساب a و c.
2. حلَّ الجملة.

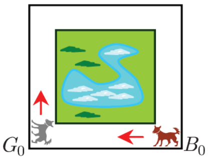
✌ سنختار الآن حدّاً وأساس المتتالية مجهولَيْ مسألتنا، ولكن أيُ الحدود نختار؟ في مثل هذه الحالات، يكون من الأنسب أن نختار الحدّ الأوسط، أي b.

1. عبّر عن a و c بدلالة b و r.
2. اكتب جملة معادلات تفيد في حساب b و r، واستنتج من ذلك a و c.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14 الملاحقة

يلعب كلبان في طريق يحيط بحديقة مربّعة طول ضلعها $250\,\text{m}$. انطلق الكلب الرمادي من النقطة G_0 راكضاً بسرعة ثابتة وقاطعاً ضلع المربّع بدقيقة واحدة. رآه الكلب البنّي الذي كان عند النقطة B_0 وأراد اللحاق به فركض ورائه بسرعة أكبر وبحيث تُقسم المسافة بينهما على 2 في كلِّ دقيقة.



عّين موضعَي الكلبين على الشكل في اللحظات المتتابعة.

نحو الحلّ

نرمز بالرّمزين B_0 و G_0 إلى موضعَي الكلبين عند البدء. وبالرّمزين B_1 و G_1 إلى موضعيهما بعد دقيقة من الزمن، وهكذا...

1. ارسم مربّعاً، وعيّن عليه المواضع G_0، G_1، G_2، G_3، G_4، G_5، G_6. ماذا تلاحظ؟ أين موضع الكلب الرمادي بعد تسع دقائق؟
2. عيّن المواضع B_0، B_1، B_2، B_3.
3. نُقرُّ أنّ الكلب البنّي قد لحق بالرماديّ إذا صارت المسافة بينهما أقلّ من $20\,\text{cm}$. نضع $d_0 = 250\,\text{m}$ وهي تمثّل المسافة بين الكلبين عند البداية، فتكون مثلاً d_5 المسافة بينهما بعد خمس دقائق. احسب d_1، d_2، d_3، d_4.
4. بعد كم دقيقة يلحق الكلبُ البنيّ الكلبَ الرمادي؟ وما المسافة التي يكون قد قطعها حينئذ؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

15 صح أو خطأ

هل يوجد مثلّث قائم الزاوية تقع أطوال أضلاعه في متتالية هندسيّة.

نحو الحلّ

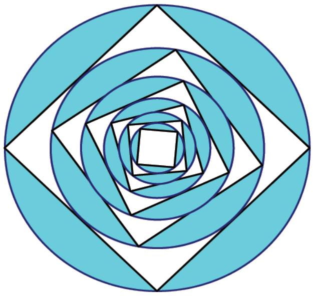
مسموحٌ ألاّ يكون لدينا فكرة سابقة عن الإجابة. وبدلاً من التجربة والخطأ، من الأفضل أن نفترض وجود مثل هذا المثلّث، ثُمّ نبحث عن الشروط التي يقتضي ذلك تحقُّقها، وأخيراً نتفحّص هذه الشروط للتوثُّق من إمكان تحقُّقها أو استحالته.

لنرمز بالرموز a و b و c إلى أطوال أضلاع المثلّث. ولنفترض أنّها ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة، نرمز إلى أساسها بالرمز q.

1. لماذا يجب أن يكون $q > 0$ ؟
2. نفترض أنّ c هو وتر المثلّث. لماذا يستحيل أن يكون $a = b$؟ علّل صحّة المتراجحة $a < b < c$.
3. أثبت أنّ $q^4 - q^2 - 1 = 0$.
4. حلَّ المعادلة السابقة (ضع $x = q^2$) وتوثّق أنّها تقبل حلّاً موجباً وحيداً.
5. أيوجد مثلّث قائم الزّاوية تقع أطوال أضلاعه في متتالية هندسيّة ؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

16 دوائر ومربّعات متداخلة



نعطى دائرة نصف قطرها $2\,\text{cm}$، وننشئ داخلها مربّعاً، ثُمّ ننشئ الدّائرة الماسّة لأضلاع المربّع. نفترض أنّه بالإمكان متابعة هذا الإنشاء إلى ما لا نهاية. ادرس متتالية مساحات الدوائر، ومتتالية مساحات المربّعات. وحدّد مرحلة الإنشاء التي تصبح بدءاً منها مساحة المربّع أصغر من $1\,\text{mm}^2$.

نحو الحلّ

☝ تنظيماً للبحث، وبهدف وضع صياغة دقيقة لِما نبحث عنه، لنرمز بالرمز d_1 إلى مساحة الدائرة الأولى مُقاسة بالسنتيمتر المربّع، ثُمّ لنرمز على التوالي بالرموز d_2، d_3،....، d_n،.... إلى مساحات الدوائر التالية. ولنرمز بأسلوب مماثل بالرّموز c_1، c_2،....، c_n،.... إلى مساحات المربّعات.

1. احسب d_1.
2. هل يفيدك هذا في حساب d_2 مباشرة؟

✌ يساوي قطر الدائرة الثّانية طول ضلع المربّع الأوّل، ومنه فكرة حساب c_1 ثُمّ d_2.

1. احسب c_1 واستنتج d_2 ثُمّ c_2.
2. أثبت أنّ $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$ وأنّ $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$. ما طبيعة هاتين المتتاليتين ؟
3. أثبت أنّ المتتاليتين $(d_n)_{n\geq 1}$ و $(c_n)_{n\geq 1}$ متناقصتين تماماً ومتقاربتين من 0.
4. عيّن دليلاً n_0 يكون لدينا بدءاً منه $c_n < \frac{1}{100}$.

أنجزِ الدراسة واكتب الحل بلغةٍ سليمة.

17 جذور تربيعيّة

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرّفة أيّاً كانت قيمة n بالعلاقة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. ادرس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، من جهة الاطّراد والنهاية إن وُجدت.

نحو الحلّ

☝ عندما لا تكون جهة الاطّراد واضحة، قد يكون من المفيد حساب الحدود الأولى علّها تهدينا إلى إجابة ممكنة.

1. استفد من آلة حاسبة، واحسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5، u_6. هل يمكنك التنبؤ بجهة تغيّرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$؟
2. احسب u_{100}، u_{10000}، u_{100000}. ما الفرضيّة التي تقترحها بشأن نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$؟

✌ لدراسة جهة اطّراد المتتالية. سنثبتُ أنّ $u_{n+1} < u_n$ أيّاً كانت قيمة n.

1. أثبت أنّ المطلوب يؤول إلى إثبات ما يأتي

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \qquad (1)$$

2. أثبت مبرّراً كلَّ خطوة أنّ (1) تُكافئ بالترتيب

- $$\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)^2 < \left(2\sqrt{n+1}\right)^2 \qquad (2)$$
- $$(n+1)+\sqrt{n(n+2)} < 2(n+1) \qquad (3)$$
- $$n(n+2) < (n+1)^2 \qquad (4)$$

3. أثبت صحّة (4) وأنجز البرهان.

✌ نتوقّع أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ وذلك مع أنّ u_n هي الفرق بين حدَّيْن يسعيان إلى $+\infty$. الطّريقة المُختارة عندما يكون في الأنحاء جذور تربيعيّة، هي ضرب البسط والمقام بالمرافق أي $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

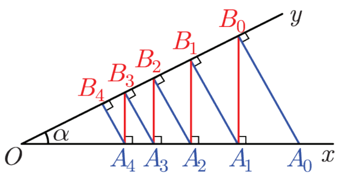
1. أثبت أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فلدينا $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. استنتج أنّه في حالة $1 \le n$ يكون لدينا $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. أيُّ مبرهنة تفيدنا لاستنتاج أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ؟

أنجزِ الدراسة واكتب الحل بلغةٍ سليمة.

18 خطٌّ مضلّعي منكسر

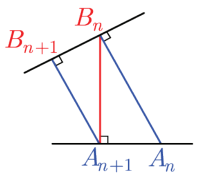


نتأمّل نصفي مستقيمين $[Ox)$ و $[Oy)$ يصنعان زاوية هندسيّة حادّة α. A_0 نقطة من $[Ox)$ تُحقّق $OA_0 = 10\,\text{cm}$. المسقط القائم للنقطة A_0 على $[Oy)$ هي B_0. وكذلك المسقط القائم للنقطة B_0 على $[Ox)$ هي A_1. وهكذا دواليك....

احسب، إن وُجِدَت، نهاية المقدار

$$\ell_n = A_0B_0 + A_1B_1 + \cdots + A_nB_n.$$

نحو الحلّ



✌ لنستخلص النتائج المباشرة من الشكل. نجد الزاوية α مرتين في الشكل المجاور.

1. أين تجدها؟ علّل إجابتك.

2. ثُمّ استنتج أنّ

$$A_{n+1}B_n = \cos\alpha \times A_nB_n \quad \text{و} \quad A_{n+1}B_{n+1} = \cos\alpha \times A_{n+1}B_n$$

✌ لحساب ℓ_n نحسب كلَّ واحد من حدود المجموع. لدينا $OA_0 = 10\,\text{cm}$. ونعرّف $u_n = A_nB_n$.

1. أثبت أنّ $u_0 = 10\sin\alpha$ وأنّ $A_{n+1}B_{n+1} = \cos^2\alpha \times A_nB_n$.
2. ما طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$؟
3. اكتب u_n بدلالة n و α وعبّر عن ℓ_n بدلالة n و α. واستنتج نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

قُدُماً إلى الأمام

19 خمسة أعداد a، b، c، d، e تكوّن حدوداً متوالية من متتالية حسابيّة. مجموع هذه الأعداد يساوي 55 ومجموع مربّعاتها يساوي 665. عيّن هذه الأعداد.

20 أوجد جميع المتتاليات الحسابيّة التي أساسها عددٌ طبيعي أكبر تماماً من 5، وأوّل حدٍّ من حدودها ينتمي إلى المجال $[-15,2]$، وتضمّ بين حدودها الأعداد 22 و 37 و 82.

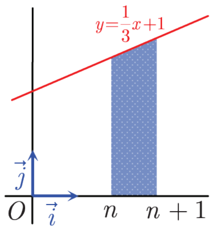
21 لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{، وأيّاً كان } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ كان } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}.$$

نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

1. بالاستفادة من رسم بياني، تنبّأ بسلوك المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. أثبت أنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة، عيّن أوّل حدودها وأساسها.
3. عبّر عن v_n، بدلالة n. ثُمّ استنتج u_n بدلالة n.
4. استنتج تقارب ونهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

22 يرمز المقداران a_n و p_n إلى مساحة ومحيط المضلّع الملوّن في الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ منسوب إلى معلم متجانس.



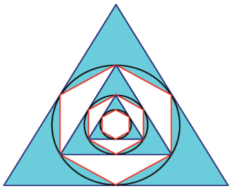
1. احسب a_n و p_n بدلالة n.
2. أثبت أنّ المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابيّتان.

23 لتكن a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة. نفترض أنّ :

$a+b+c=21$ و $2a+b-c=27$.

احسب a و b و c.

24 في الشكل المجاور، جميع المضلّعات المرسومة منتظمة. ونفترض أنّ الإنشاء يُتابع إلى ما لا نهاية.



1. أثبت أنّ كلاً من متتالية مساحات المثلّثات $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومتتالية مساحات المسدسات $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسيّة.
2. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة، أيّاً كانت قيمة n، كما يأتي: $u_{2n}=t_n$ و $u_{2n+1}=h_n$ هي أيضاً متتالية هندسيّة.
3. احسب نسبة مساحة السطح الأزرق إلى مساحة السطح الأبيض داخل المثلّث الأكبر.

25 لتكن a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة غير ثابتة. نفترض أنّ الأعداد b و c و a بهذا الترتيب تكوّن أيضاً ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة. فإذا علمتَ أنّ $a+b+c=18$، احسب a و b و c.

26 لنتأمّل متتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. نفترض أنّ المتتاليتين متزايدتان، ونعرّف $w_n=u_n+v_n$. أثبت أنّ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. وأنّها متزايدة تماماً إذا كانت إحدى المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.
2. ادرس جهة اطّراد المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $w_n=2^n+3n-1$.

27 لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)^2}$.

1. احسب، مستعملاً آلة حاسبة، u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 . ماذا تتنبأ بشأن جهة اطّراد هذه المتتالية.
2. احسب u_6 . ماذا تستنتج؟
3. ادرس جهة اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية تتقارب من 0. عيّن دليلاً m يحقّق ما يأتي

- u_n تنتمي إلى المجال $I=]-10^{-5},10^{-5}[$ في حالة $m<n$.
- u_n تنتمي إلى المجال $I=]-10^{-10},10^{-10}[$ في حالة $m<n$.

① $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ n>0$ ② $u_n=\dfrac{2}{n^2},\ n>0$ ③ $u_n=\dfrac{1}{n+5}$ ④ $u_n=\dfrac{-5}{2n+1}$

29 لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{2n^2 - 3\sin n}{n^2+1}$.

1. أثبت أنّه، مهما تكن n، فلدينا $\dfrac{2n^2+3}{n^2+1} \geq u_n \geq \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$.
2. استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

30 لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة، في حالة $1 \leq n$، بالعلاقة

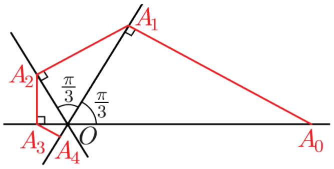
$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. احسب الحدود u_1، u_2، u_3، u_4.
2. يساوي u_n مجموعَ n حدّاً. عيّن أكبرها وأصغرها.
3. استنتج أنّه، مهما تكن n، فلدينا

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

وعين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

31 نفترض أنّ الإنشاء المبيّن في الشكل المجاور يُتابَعُ إلى ما لا نهاية، وأنّ $OA_0 = 4\,\text{cm}$. أوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة



$$u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$$

32 ليكن f التابع $x \mapsto (x+1)^3 - x^3$. نعرّف المجموعين:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n \quad \text{و} \quad P = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

① تحقّق أنّ $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$.

② عوّض على التوالي x بالأعداد 1، 2، ...، n واستنتج

$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = 3P + 3S + n$.

③ استنتج قيمة $P + S$ بدلالة n، ثمّ احسب المجموع P بدلالة n.

33 حلّ المعادلات الآتية :

① $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^6} = 0$.

② $1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{1}{8x^3} + \dfrac{1}{16x^4} - \dfrac{1}{32x^5} = 0$.

③ $27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$.

34 نتأمّل في مستو مزوّد بمعلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ النقطتين $A_0(1,1)$ و $A_1(2,2)$. ونتأمّل الخطّ المضلّعي المنكسر $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ الذي يُحقّق في حالة كلِّ عدد طبيعي n ما يأتي

- فاصلة النقطة A_n هي $n+1$.
- إذا رمزنا بالرمز u_n إلى ميل المستقيم (A_nA_{n+1}) كانت $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها $\frac{1}{2}$.

① عيّن في المستوي النقاط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 .

② نفترض أنّ إحداثيي النقطة A_n هما (x_n, y_n). أثبت أنه مهما تكن $0 < n$ يكن

$$y_n - y_{n-1} = \frac{n+1}{2}$$

③ استنتج أنّ $y_n = \dfrac{n^2+3n+4}{4}$.

④ أثبت أنّ جميع النقاط A_n تقع على قطع مُكافئ $\mathcal{P}$، ارسمه على الشكل نفسه مع النقاط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 .

35 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \quad \text{وأياً كان } 0 \leq n ، \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}$$

① نعرّف $v_n = u_{n+1} - u_n$. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

② عبّر عن v_n بدلالة n،

③ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

④ ما نهاية المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$؟

⑤ عيّن عدداً طبيعيّاً m يجعل $\left|u_{n+1} - 3\right| < 10^{-5}$ أيّاً كانت قيمة $m \leq n$.

أمثلة على اختبارات نموذجية

1. اختبار للوحدة الأولى
2. اختبار للوحدة الثانية
3. اختبار للوحدة الثالثة
4. اختبار للوحدة الرابعة
5. اختبار للوحدة الخامسة
6. اختبار شاملٌ

اختبار للوحدة الأولى

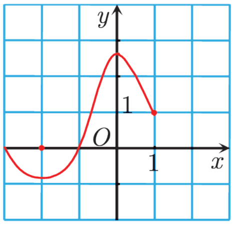
المدة: ساعة ونصف

أولاً: اختر كلّ إجابة صحيحة من بين الإجابات الأربعة لكلّ سؤال ممّا يأتي: **(80 درجة)**

.1	التابع $x \mapsto \frac{1}{x} + x^3$ هو تابعٌ						
A	زوجي	B	فردي	C	خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ	D	خطه البياني متناظر بالنسبة للمحور oy
.2	f و g معرّفان وفق $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + x$ و $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$. مجموعة تعريف $f + g$ هي						
A	$\mathbb{R}$	B	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	C	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	D	$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$
.3	ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ، حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي						
A	$\{2,1\}$	B	$\{2,-1\}$	C	$\{2\}$	D	$\{2,-1,1\}$
.4	f و g التابعين المعرّفين على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3x^2$. التابع $f \circ g$						
A	متناقص على $[0,+\infty[$	B	متزايد على $[0,+\infty[$	C	متناقص على $\mathbb{R}$	D	متزايد على $\mathbb{R}$

ثانياً: دلَّ على المقولات الصحيحة فيما يأتي معلّلاً إجابتك **(80 درجة)**

مثّلنا جانباً الخطّ البياني C_f لتابع f معرّف على $[-3,1]$.



1. للمعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول.
2. حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي المجال $[-3,1]$.
3. f تابعٌ فردي.
4. f متناقص تماماً على المجال $[0,1]$.

ثالثاً: حلّ التمرينين الآتيين: **(80 درجة للأول، 60 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ليكن f التابع المعطى بالعلاقة $f(x) = \sqrt{1-x}$.

1. عيِّن مجموعة تعريفه D_f .
2. اكتب f بصيغة تركيب تابعين مألوفين.
3. ادرس اطّراد f على D_f .

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $I = [0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x} + 5x - 2$.

1. ادرس جهة اطّراد التابع $-3f$.
2. استنتج أنّ $-3f(x) \leq 6$ على المجال I .

المدة: ساعتان

اختبار للوحدة الثانية

أولاً: دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معلّلاً اجابتك. **(80 درجة)**

1. يقبل التابع $f : x \mapsto |x-3|$ الاشتقاق عند العدد 3.
2. التابع $f : x \mapsto x^2 - x^3$ اشتقاقي على مجموعة الأعداد الحقيقيّة.
3. مشتق التابع $f : x \mapsto \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$ يساوي الصفر.
4. إذا كان التابع غير اشتقاقي عند نقطة فهذا يعني عدم وجود مماساً لمنحني التابع في هذه النقطة.

ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(70 درجة للأول، 70 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرّف على $]-\infty,2[$ بالعلاقة $f(x) = \sqrt{2-x}$.

1. أثبت أنّ f اشتقاقي على $]-\infty,2[$ واحسب $f'(0)$.
2. اكتب معادلة للمماس في النقطة التي فاصلتها 1 للخطّ البياني للتابع f.

التمرين الثاني: احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

1. $f(x) = \sqrt{3x} - x^7 + 2$
2. $f(x) = 4\sin x + \cos(3x-1)$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{(x-3)^2}$

ثالثاً: حلّ المسألة الآتية: **(80 درجة)**

ليكن f تابعاً كثير الحدود من الدّرجة الثّانية، خطّه البياني $\mathcal{C}$، نفترض أنّ النقطة $A(0,1)$ تقع على $\mathcal{C}$ وأنّ $f'(2) = 3$ وأنّ المُماس T للخطّ البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1 أفقيٌّ. عيّنِ التابع f في حال وجوده.

المدة: ساعتان

اختبار للوحدة الثالثة

أولاً: دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معللاً اجابتك. **(60 درجة)**

1. الحدُّ الراجح للتابع f على المجموعة D هو القيمة الكبرى للتابع في D.
2. التابع $f : x \mapsto 2x^3 + 1$ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$.
3. التابع $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}^*$.
4. إذا كان للقيمتين $f(0)$ و $f(1)$ إشارتين متعاكستين كان للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً في المجال $]0,1[$.

ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(60 درجة للأول، 50 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ادرس اطراد التابع f المعرّف بالعلاقة $f(x) = 2 + x\sqrt{x}$ على المجال $[0,+\infty[$، ثمّ بيّن إذا كانت له قيمٌ حديّة محليّاً.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً في المجال $[-2,0]$.

ثالثاً: حلّ المسألتين الآتيتين: **(65 درجة للأولى، 65 درجة للثانية)**

المسألة الأولى: نتأمّل في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y = -x^2$، والنقطة A التي إحداثيّتاها $(0,2)$. عيّن النقاط M من القطع $\mathcal{P}$ الأقرب إلى A.

المسألة الثانية: يُراد صنعُ قطعة صابون بشكل متوازي مستطيلات قاعدته مربع وحجمُه $V = 100\text{cm}^3$. احسب طول ضلع قاعدته وارتفاعه لكي تكون مساحة سطحه أصغر ما يمكن.

اختبار للوحدة الرابعة

المدة: ساعتان

أولاً: دلَّ على الخواصّ الصحيحة فيما يأتي معللاً إجابتك. **(60 درجة)**

1. نهاية تابع كثير الحدود هي نفسها نهاية حدِّه الذي له أعلى درجة.
2. إذا كان f تابعاً معرّفاً عند a ، كان $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
3. ليكن التابع f المعرّف وفق $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x-1}}$. لهذا التابع مقارب شاقولي.
4. للخطّين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الممثِّلين للتابعين $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$ و $g(x) = x+3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ المقاربات نفسها.

ثانياً: حلّ التمرينات الثلاث الآتية: **(60 درجة للأول، 75 درجة للثاني، 55 درجة للثالث)**

التمرين الأول: ليكن f و g التابعين المعرّفين بالعلاقتين $g(x) = -x^2$ و $f(x) = 3x^2+9$. احسب النهايات $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \big(f+g\big)(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} (fg)(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

التمرين الثاني: ادرس التابع $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - 1$ ، $x \mapsto$ مبيناً أن النقطة $I(0,-1)$ هي مركز تناظر الخطّ البياني للتابع، ثُم ارسم هذا الخطّ.

التمرين الثالث: اعتماداً على جدول التغيرّات المبين أدناه، عيِّن مجموعة تعريف التابع f ونهاياته عند أطراف مجموعة التعريف، ومجالات التزايد والتناقص.

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		‖		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ثالثاً: حلّ المسألة الآتية: **(60 درجة)**

هل يوجد تابع كثير الحدود f من الدّرجة الثّالثة، فردي، ويقبل خطّه البياني $\mathcal{C}_f$ مماساً أفقياً في النقطة $A\big(0,2\big)$ ؟

اختبار للوحدة الخامسة

المدة: ساعتان

أولاً: بيّن إذا كانت المقولات الآتية صحيحة معلّلاً اجابتك. **(40 درجة)**

1. العلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ مع $u_0 = -2$ تعرّف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = n(1-n)$ متتالية حسابيّة.
3. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 1$ متتالية هندسيّة.
4. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ متتالية متقاربة.

ثانياً: حلّ التمرينين الآتيين: **(80 درجة للأول، 60 درجة للثاني)**

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x) = \sin \pi x$.

1. لتكن المتتالية $u_n = f(n)$. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. ادرس اطّراد التابع f على المجال $[0, 2]$.
3. ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.

1. ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. احسب الحدود u_1، u_2، ....، u_5.
3. أثبت أنّ المتتالية $(v_x)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

ثالثاً: حلّ المسألة الآتية: **(120 درجة)**

نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجياً كما يأتي :

$$u_0 = 1 \text{ وفي حالة } n \geq 0 \text{ لدينا } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

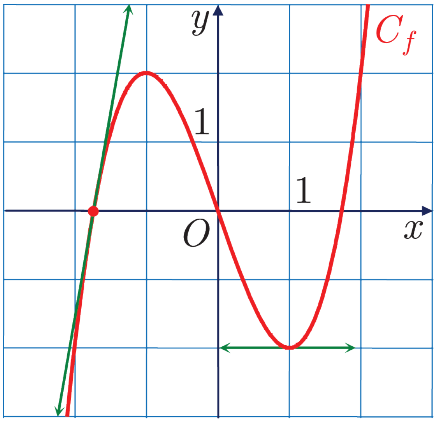
1. احسب u_1 و u_2 و u_3، ثُمّ بيّن أتكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أو هندسيّة؟
2. نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة $v_n = u_n - 2n + 6$. احسب v_0 و v_1 و v_2 و v_3.
3. أثبت أنّ المتتالية $(v\ )_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $\dfrac{1}{2}$.
4. استنتج عبارة v_n بدلالة n، ثمّ عبارة u_n بدلالة n.
5. احسب نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ عندما تسعى n إلى اللّانهاية.
6. احسب $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

اختبار شامل

المدة: ثلاث ساعات

أولاً : دلَّ على الخواصّ الصحيّحة فيما يأتي معلّلاً إجابتك. (90 درجة)

مثّلنا جانباً الخطّ البياني C_f لتابع كثير الحدود f من الدرجة الثالثة.



1. f تابعٌ فردي.
2. f متزايدٌ تماماً على $[0,1[$.
3. للمعادلة $f(x)=1$ ثلاثة حلول.
4. $f'(1)=0$.
5. $6h$ تقريبٌ تآلفيّ محليّ للمقدار $f\left(h-\sqrt{3}\right)$.
6. 2 هي قيمةٌ كبرى محليّاً للتابع f.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
8. في حالة $u_n=f(n)$ و $n\geq 1$، تكون $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.
9. المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n=f(n)$. متتالية متقاربة.

ثانياً: حلّ التمارين الثلاث الآتية: (40 درجة للأول، 40 درجة للثاني، 40 درجة للثالث)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$$

1. ادرس اطّراد التابع.
2. اكتب معادلة المماس للخطّ البياني للتابع في نقطة منه فاصلتها تساوي 1.
3. أيَقبل الخطّ البياني للتابع f مماسات توازي محور الفواصل؟
4. ناقش حلول المعادلة $f(x)=\lambda$ حيث λ وسيط حقيقي معطى.

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x^2}$. وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. أثبت أنّ $\mathcal{C}_f$ يقبل المستقيم Δ ذا المعادلة $y=-1+2x$ مقارباً مائلاً.
2. ادرس وضع المقارب Δ بالنسبة إلى المنحني $\mathcal{C}_f$.

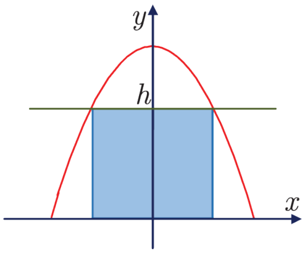
التمرين الثالث: في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq1}$ نعرّف $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

1. نفترض أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ حسابيّة، فيها $r = 3$ و $S_{10} = 450$. احسب u_1 و u_n .
2. نفترض أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ هندسيّة، فيها $q = 3$ و $u_4 = 12$. احسب S_9 .

ثالثاً: حلّ المسألتين الآتيتين: **(45 درجة للأول، 45 درجة للثاني)**

المسألة الأولى: ليكن f تابعاً كثير الحدود من الدرجة الثانية، وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في مَعْلَم متجانس. نفترض أنّ النقطة $A(1,3)$ تقع على $\mathcal{C}$ وأنّ المماس T للخطّ البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 3 يوازي المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ وأخيراً أنّ $f'(2) = 0$. عيّن التابع f .

المسألة الثانية: ليكن h عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. ننسب المستوي إلى مَعْلَم متجانس. ونتأمّل جزء المستوي المحدَّد بالقطع الذي معادلته $y = 4 - x^2$ وبالمستقيم الذي معادلته $y = h$. نريد أن نُنشئ داخل ذلك الجزء مستطيلاً، كما هو مبيَّن في الشّكل المجاور. احسب h لكي تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن.



مسرد المصطلحات العلميّة

العربية	الانكليزية
تابع	Function
إثبات بالتدريج أو بالاستقراء الرياضيّ	Proof by mathematical induction
اطّراد	Monotonicity
باقي القسمة	Remainder
تابع التجيب	Cosine function
تابع الجيب	Sine function
تابع الظلّ	Tangent function
تابع تآلفي	Affine function
تابع دوري	Periodic function
تابع زوجي	Even function
تابع فردي	Odd function
تركيب التوابع	Function composition
تقريب تآلفي	Affine approximation
حدّ راجح	Upper bound
حدّ قاصر	Lower bound
خارج القسمة	Quotient
خطّ بياني (تابع)	Graph of function
عدم تعيين	Indetermination
القسمة الإقليدية	Euclidean division
قطع زائد	Hyperbola
قطع مكافئ	Parabola
قيمة صغرى محلياً	Local minimum
قيمة كبرى محلياً	Local maximum
كثير الحدود	Polynomial
اللّانهاية	Infinity
متتالية	Sequence
متتالية حسابيّة	Arithmetic sequence
متتالية متباعدة	Divergent sequence
متتالية متقاربة	Convergent sequence

العربية	الانكليزية
متتالية محدودة	Bounded sequence
متتالية هندسيّة	Geometric sequence
متراجحة	Inequality
متزايد (تابع)	Increasing
متناقص (تابع)	Decreasing
مجال	Interval
مجموعة تعريف (تابع)	Domain
محور تناظر	Axis of symmetry
مركز تناظر	Center of symmetry
مشتق	Derivative
معادلة	Equation
المعْلَم	Coordinate system
مُقارب	Asymptote
مُقارب مائل	Oblique asymptote
مُماس	Tangent
مُميّز	Discriminant
نهاية	Limit
تابع هوموغرافي	Homographic function